ÜBERTRAGUNG DER FITTINGSCHEN STRUKTURANALYSE AUF UNENDLICHE GRUPPEN

---

von

Erich Wittmann

aus Schwabach

1967

1967 № 212

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535725_0052

ÜBERTRAGUNG DER FITTINGSCHEN STRUKTURANALYSE AUF UNENDLICHE GRUPPEN

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Erich Wittmann
aus Schwabach

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 19.7.1967

Dekan: Universitätsprofessor Dr. K. Brodersen

Erstberichterstatter: Universitätsprofessor Dr. W. Specht

Zweitberichterstatter: Universitätsprofessor Dr. G. Nöbeling

Inhalt

	Seite
Einleitung	1
1. Ω-metabelsche und Ω-halbeinfache Gruppen	4
2. Ω-vollreduzible Gruppen	6
3. Zusammenhänge zwischen Ω-vollreduziblen und Ω-halbeinfachen Gruppen	18
4. Anwendung auf Gruppen ohne Operatoren	21
5. Auflösbare und hyperzentrale Gruppen	28
6. Gruppenerweiterungen	40
7. Auflösbare Gruppen als spezielle verschränkte Produkte	44
8. Erweiterungen auflösbarer durch halbeinfache Gruppen	54
Literatur	55

Einleitung

Im Jahre 1938 analysierte H. FITTING ([1]) die Struktur der endlichen Gruppen in folgender Weise:

1. Jede endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt einen einzigen maximalen auflösbaren Normalteiler $\mathfrak{A}$, so daß die zugehörige Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ halbeinfach ist (d.h. keinen von 1 verschiedenen auflösbaren Normalteiler besitzt).

2. Jede endliche halbeinfache Gruppe $\mathfrak{H}$ hat einen einzigen maximalen vollreduziblen (d.h. in ein direktes Produkt einfacher Gruppen zerlegbaren) Normalteiler $\mathfrak{N}$.
   $\mathfrak{H}$ ist einer Automorphismengruppe H von $\mathfrak{N}$ isomorph, welche die Gruppe $J(\mathfrak{N})$ der inneren Automorphismen von $\mathfrak{N}$ umfaßt:
   $$J(\mathfrak{N}) \leq H \leq A(\mathfrak{N})$$
   ($A(\mathfrak{N})$ bezeichnet die volle Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$).
   Umgekehrt ist jede Zwischengruppe H^* mit
   $$J(\mathfrak{N}) \leq H^* \leq A(\mathfrak{N})$$
   halbeinfach und besitzt $J(\mathfrak{N}) \cong \mathfrak{N}$ als zugehörigen maximalen vollreduziblen Normalteiler.

3. Jede endliche auflösbare Gruppe $\mathfrak{A}$ besitzt einen einzigen maximalen nilpotenten Normalteiler $\mathfrak{N}$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ ist isomorph einer Untergruppe $\bar{S}$ der äußeren Automorphismengruppe $\bar{A}(\mathfrak{N})$.

4. Eine endliche Gruppe $\mathfrak{N}$ ist genau dann nilpotent, wenn

sie direktes Produkt ihrer (einzigen) p-Sylowgruppen $\mathfrak{A}_p$ ist:

$$\mathfrak{A} = \times \mathfrak{A}_p \qquad (p \mid \operatorname{ord} \mathfrak{A}).$$

Diese Strukturzerlegung ist dadurch charakterisiert, daß sich nach Abspaltung einer halbeinfachen Gruppe, die mit abelschen Gruppen nichts Wesentliches mehr gemein hat, auflösbare und nilpotente Gruppen ergeben, die insofern mit abelschen Gruppen verwandt sind, als sie Normalteilerreihen mit abelschen Faktoren besitzen.

In der vorliegenden Arbeit stellen wir uns die Aufgabe, die FITTINGsche Strukturanalyse für eine möglichst ausgedehnte Klasse unendlicher Gruppen durchzuführen, wobei wir uns an der Arbeit FITTING [1] orientieren.
Hierzu bieten sich verschiedene Wege an. Im Falle endlicher Gruppen nämlich lassen sich die Eigenschaften "halbeinfach", "auflösbar" und "nilpotent" jeweils durch eine Reihe äquivalenter Definitionen erfassen, die bei unendlichen Gruppen i. a. nicht mehr äquivalent sind (vgl. R. BAER [2]).
Je nach Wahl entsprechender Begriffsbildungen erhält man so bei unendlichen Gruppen verschiedene Ergebnisse.
Die eine oder andere Richtung ist von verschiedenen Autoren bei der Verallgemeinerung einzelner Teile von FITTING [1] schon eingeschlagen worden (P.A. GOLBERG [1], K.A. HIRSCH [1], B.I. PLOTKIN [1] und [3], W. SPECHT [2], J. WIEGOLD [1]).
Wir können uns auf diese Resultate aber nicht uneingeschränkt

stützen, da wir z.T. abweichende Definitionen zugrundelegen müssen, wenn wir alle Teile der Fittingschen Arbeit nahtlos übertragen wollen.
In FITTING [1] geht die Endlichkeit der betrachteten Gruppen so entscheidend ein, daß man bei der Übertragung auf unendliche Gruppen auf Endlichkeitsbedingungen nicht verzichten kann, wenn man schärfere Aussagen gewinnen will. Wir setzen in jedem Abschnitt zunächst möglichst schwache Endlichkeitsbedingungen voraus bzw. sehen ganz davon ab, verschärfen sie aber im Verlauf der Untersuchungen schrittweise. Dabei werden sich die Ergebnisse immer enger an die FITTINGschen Sätze für endliche Gruppen anlehnen. Wir werden u.a. zeigen, daß (mit unseren Definitionen) die Fittingschen Strukturaussagen für alle ordnungsfiniten Gruppen, bei welchen der Normalteilerverband jeder charakteristischen Untergruppe die schwache Minimalbedingung erfüllt, nahezu wörtlich gelten. Obwohl es uns letztlich auf Gruppen ohne Operatoren ankommt, betrachten wir am Anfang auch Gruppen mit Operatoren, einerseits der größeren Allgemeinheit, andererseits des besseren Verständnisses halber. Durch geeignete Spezialisierung des Operatorbereichs erhalten wir daraus Strukturaussagen für Gruppen ohne Operatoren.

Das Kapitel über vollreduzible Gruppen stützt sich auf ein Manuskript meines verehrten Lehrers Herrn Prof. W. Specht. Ich möchte ihm an dieser Stelle von Herzen für die freundliche Förderung danken, die er mir weit über diese Arbeit hinaus während meines Studiums hat angedeihen lassen.

1. Jede Ω-Gruppe ist normale Erweiterung einer Ω-metabelschen durch eine Ω-halbeinfache Gruppe.

1.1. Definition: Eine Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ (mit dem Operatorbereich Ω) heißt Ω-metabelsch, wenn eine Ω-Normalfolge ($\mathfrak{A}_\nu;\Omega$) existiert mit folgenden Eigenschaften:

(1.1.) $\mathfrak{A}_0;\Omega = E$, $\mathfrak{A}_\sigma;\Omega = \mathfrak{G};\Omega$ für ein $\sigma \in \Lambda$ *)

(1.2.) $\mathfrak{A}_\nu;\Omega \lhd \mathfrak{A}_{\nu+1};\Omega$, $\mathfrak{A}_{\nu+1}/\mathfrak{A}_\nu;\Omega$ abelsch für alle $\nu < \sigma$

(1.3.) $\mathfrak{A}_\lambda;\Omega = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{A}_\nu;\Omega$ für jeden Limesindex $\lambda \leq \sigma$

Wir stellen fest (SPECHT [1], Satz 3.1.17):

1.2. Satz:

1. Jedes Ω-homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{U}};\Omega$ einer jeden Untergruppe $\mathfrak{U};\Omega$ einer Ω-metabelschen Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ist Ω-metabelsch.
2. Die Vereinigung $\mathfrak{V};\Omega = \bigcup \mathfrak{N};\Omega$ einer Kette Ω-metabelscher Normalteiler $\mathfrak{N};\Omega$ einer Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ist ein Ω-metabelscher Normalteiler von $\mathfrak{G};\Omega$.
3. Das Kompositum $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2;\Omega$ zweier Ω-metabelscher Normalteiler $\mathfrak{A}_1;\Omega$ und $\mathfrak{A}_2;\Omega$ einer Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ist Ω-metabelsch.

Die Theorie der abstrakten Gruppeneigenschaften (SPECHT [1], Satz 1.4.27*) liefert dann sofort:

1.2.* Satz: In jeder Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ existiert ein einziger maximaler Ω-metabelscher Normalteiler $\mathfrak{A};\Omega$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A};\Omega$ besitzt keinen Ω-metabelschen Nor-

*) Λ sei eine hinreichend große Ordinalzahl.

malteiler $\neq 1$.

1.3. Definition: Eine Gruppe $\mathfrak{h};\Omega$ heißt Ω-halbeinfach, wenn sie keinen von 1 verschiedenen Ω-metabelschen Normalteiler besitzt.

Mit dieser Festlegung ergibt sich aus Satz 1.2.* sofort:

1.2.** Satz: Jede Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ist in eindeutiger Weise normale Erweiterung einer Ω-metabelschen Gruppe $\mathfrak{A};\Omega$ durch eine Ω-halbeinfache Gruppe $\mathfrak{h};\Omega$.

2. Ω-vollreduzible Gruppen

Es ist unser Ziel, analog zur Theorie der endlichen Gruppen in einer Ω-halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{H};\Omega$ einen Ω-Normalteiler möglichst einfacher gruppentheoretischer Struktur zu finden, auf den wir in gewissen Fällen die Struktur von $\mathfrak{H};\Omega$ zurückführen können.

2.1. Definition: Eine Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ heißt Ω-vollreduzibel, wenn zu jedem Normalteiler $\mathfrak{N};\Omega \triangleleft \mathfrak{G};\Omega$ ein Normalteiler $\mathfrak{N}^*;\Omega$ von $\mathfrak{G};\Omega$ existiert, derart daß $\mathfrak{G};\Omega$ die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{G};\Omega = \mathfrak{N};\Omega \times \mathfrak{N}^*;\Omega$$

besitzt.

Die Existenz eines einzigen maximalen vollreduziblen Normalteilers in einer endlichen halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{H}$ (ohne Operatoren) beruht wesentlich auf der Tatsache, daß jeder Normalteiler $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{H}$ eine Gruppe ohne Zentrum ist. Man muß sich daher bei Ω-Gruppen von vorneherein auf Ω-Normalteiler ohne Zentrum beschränken.
Die gruppentheoretische Eigenschaft "Ω-vollreduzibel ohne Zentrum *)" vererbt sich in der gewünschten Weise:

2.2. Satz:

1. Jeder Normalteiler $\mathfrak{N};\Omega$ einer Ω-vollreduziblen Gruppe ohne Zentrum ist ebenfalls eine Ω-vollreduzible Gruppe ohne Zentrum.
2. Jedes Ω-homomorphe Bild einer Ω-vollreduziblen Gruppe

*) Es ist damit nicht das Ω-Zentrum gemeint.

$\mathfrak{G};\Omega$ ohne Zentrum ist Ω-vollreduzibel ohne Zentrum.

3. Die Vereinigung $\mathfrak{V};\Omega = \bigcup \mathfrak{A};\Omega$ einer Kette Ω-vollreduzibler Normalteiler $\mathfrak{A};\Omega$ ohne Zentrum ist eine Ω-vollreduzible Gruppe ohne Zentrum.

4. Das Kompositum $\mathfrak{M}\mathfrak{A};\Omega$ zweier Ω-vollreduzibler Normalteiler $\mathfrak{M};\Omega$ und $\mathfrak{A};\Omega$ ohne Zentrum ist gleichfalls Ω-vollreduzibel ohne Zentrum.

Beweis: Ad 1. Aus der Ω-Vollreduzibilität von $\mathfrak{G};\Omega$ ergibt sich eine direkte Zerlegung

$$(2.1.) \qquad \mathfrak{G};\Omega = \mathfrak{A};\Omega \times \mathfrak{A}^*;\Omega .$$

Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = E$ ist auch $\mathfrak{A};\Omega$ eine Gruppe ohne Zentrum. Wenn nun $\mathfrak{L};\Omega$ Normalteiler von $\mathfrak{A};\Omega$ ist, so folgt wegen (2.1.) auch

$$(2.2.) \qquad \mathfrak{L};\Omega \lhd \mathfrak{G};\Omega .$$

Somit existiert auch eine Zerlegung

$$\mathfrak{G};\Omega = \mathfrak{L};\Omega \times \mathfrak{L}^*;\Omega ,$$

mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{L}^*) = E$.

Nun besitzt (SPECHT [1], Lemma 1 S.229) die Zwischengruppe $\mathfrak{L};\Omega \leq \mathfrak{A};\Omega \leq \mathfrak{G};\Omega$ die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{A};\Omega = \mathfrak{L};\Omega \times (\mathfrak{L}^* \cap \mathfrak{A});\Omega ,$$

wobei $(\mathfrak{L}^* \cap \mathfrak{A});\Omega$ ein Ω-zulässiger Normalteiler von $\mathfrak{A};\Omega$ ist.

2.3. Folgerung: Eine Untergruppe $\mathfrak{U};\Omega$ eines Normalteilers $\mathfrak{A};\Omega$ einer Ω-vollreduziblen Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ist genau dann Normalteiler von $\mathfrak{G};\Omega$, wenn sie Normalteiler von $\mathfrak{A};\Omega$ ist.

2.4. Bemerkung: Der komplementäre Faktor $\mathfrak{N}^*;\Omega$ in (2.1.) ist der Ω-Zentralisator $\mathfrak{z}(\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{H});\Omega$ und ist damit eindeutig bestimmt.

Zunächst gilt nämlich

$$[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*] = E$$

d.h. $$\mathfrak{N}^*;\Omega \trianglelefteq \mathfrak{z}(\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{H}) ;$$

Nach dem oben zitierten Lemma folgt daraus

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{H});\Omega = \mathfrak{N}^*;\Omega \times (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{H}));\Omega$$

Hierin ist der zweite Faktor das Ω-Zentrum von $\mathfrak{N};\Omega$ und damit in $\mathfrak{z}(\mathfrak{N}) = E$ enthalten.

Ad 2. Sei $\overline{\mathfrak{H}};\Omega$ die Bildgruppe von $\mathfrak{H};\Omega$ bei dem Ω-Homomorphismus

$$\eta : \mathfrak{H};\Omega \longrightarrow \overline{\mathfrak{H}};\Omega$$

mit dem Kern $\mathfrak{E}_\eta;\Omega$.

$\mathfrak{E}_\eta;\Omega$ induziert in $\mathfrak{H};\Omega$ eine Zerlegung

$$\mathfrak{H};\Omega = \mathfrak{E}_\eta;\Omega \times \mathfrak{E}^*;\Omega .$$

Daraus erhalten wir

$$\overline{\mathfrak{H}};\Omega \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{E}_\eta;\Omega = \mathfrak{E}^*\mathfrak{E}_\eta/\mathfrak{E}_\eta;\Omega \overset{\Omega}{\cong} \mathfrak{E}^*/\mathfrak{E}_\eta \cap \mathfrak{E}^*;\Omega = \mathfrak{E}^*;\Omega$$

$\mathfrak{E}^*;\Omega$ ist nach Satz 2.2.1. Ω-vollreduzibel ohne Zentrum und damit auch $\overline{\mathfrak{H}};\Omega$.

Ad 3. Sei $\mathfrak{N}_1;\Omega \trianglelefteq \mathfrak{N}_2;\Omega \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq \mathfrak{N}_\nu;\Omega \trianglelefteq \ldots$ eine Kette Ω-vollreduzibler Normalteiler ohne Zentrum, $\mathfrak{V};\Omega$ ihre Vereinigung

$$\mathfrak{V};\Omega = \bigcup_\nu \mathfrak{N}_\nu;\Omega .$$

Aus $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{V})$ folgt $Z \in \mathfrak{N}_{\nu_0}$ für ein ν_0 und $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{N}_{\nu_0}) = 1$, d.h. aber

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{W}) = 1.$$

Weiter sei $\mathfrak{A};\Omega$ ein Normalteiler von $\mathfrak{W};\Omega$.

Wir bilden die Kette $((\mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{A});\Omega)$.

Zu jedem $\mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{A};\Omega \lhd \mathfrak{G};\Omega$ existiert nach Voraussetzung ein $\mathfrak{A}_\nu^*;\Omega$ mit

$$\mathfrak{A}_\nu;\Omega = \mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{A};\Omega \times \mathfrak{A}_\nu^*;\Omega, \tag{2.3.}$$

wobei zunächst $\mathfrak{A}_\nu^*;\Omega \lhd \mathfrak{A}_\nu;\Omega$. Wegen Folgerung 2.3. haben wir aber

$$\mathfrak{A}_\nu^*;\Omega \lhd \mathfrak{A}_\mu;\Omega \qquad \text{für alle } \mu \geq \nu$$

und somit

$$\mathfrak{A}_\nu^*;\Omega \lhd \mathfrak{W};\Omega \qquad \text{für alle } \nu. \tag{2.4.}$$

Es gilt

$$\bigcup_\nu (\mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{A};\Omega) = \mathfrak{A} \cap (\bigcup_\nu \mathfrak{A}_\nu);\Omega = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{W};\Omega = \mathfrak{A};\Omega.$$

Wir setzen

$$\mathfrak{A}^*;\Omega := \bigcup_\nu \mathfrak{A}_\nu^*;\Omega$$

und behaupten

$$\mathfrak{W};\Omega = \mathfrak{A};\Omega \times \mathfrak{A}^*;\Omega. \tag{*}$$

$\mathfrak{A}^*;\Omega$ ist wegen (2.4.) Ω-Normalteiler von $\mathfrak{W};\Omega$.

Jedes $\overline{X} \in \mathfrak{W};\Omega$ besitzt wegen (2.3.) eine Zerlegung

$$\overline{X} = X'Y',$$

wobei $X' \in \mathfrak{A}_{\nu_1} \cap \mathfrak{A};\Omega$, $Y' \in \mathfrak{A}_{\nu_1}^*;\Omega$ für ein geeignetes ν_1. Mithin

$$\mathfrak{W};\Omega = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*;\Omega. \tag{2.5.}$$

Zu $X \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^*;\Omega$ existiert ein ν_2 mit

$$X \in \mathfrak{A}_{\nu_2}^*;\Omega. \tag{2.6.}$$

Aus (2.3.) folgt nun $X \in \mathfrak{A}_{\nu_2};\Omega$ und

$$X \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}_{\nu_2};\Omega. \tag{2.7.}$$

(2.3.), (2.6.) und (2.7.) zeigen aber nun, daß X = E ist. Damit ist (*) bewiesen.

Ad 4. Sei $\mathfrak{K};\Omega$ das Kompositum der Ω-vollreduziblen Normalteiler ohne Zentrum $\mathfrak{M};\Omega$ und $\mathfrak{A};\Omega$.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\mathfrak{S};\Omega := \mathfrak{M} \cap \mathfrak{A};\Omega$$

$$\mathfrak{S}^* := \mathfrak{Z}(\mathfrak{S} \leq \mathfrak{K}).$$

$\mathfrak{S};\Omega$ ist nach Satz 2.2.1. eine Gruppe ohne Zentrum, so daß

(2.8.) $$\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^* = 1$$

ist.

Weiter haben wir die Zerlegungen

(2.9.) $$\mathfrak{M};\Omega = \mathfrak{S};\Omega \times (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{S}^*);\Omega$$

und

(2.10.) $$\mathfrak{A};\Omega = \mathfrak{S};\Omega \times (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{S}^*);\Omega .$$

Insgesamt ergibt sich

$$\mathfrak{K};\Omega = \mathfrak{M}\mathfrak{A};\Omega = \left[(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{S}^*);\Omega \times \mathfrak{S};\Omega\right] \cdot (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{S}^*);\Omega .$$

Dieses Produkt ist aber direkt, denn aus (2.8.) und (2.9.) folgt

$$(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{S}^*) \cdot \mathfrak{S} \cap (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{S}^*) = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{A} \cap \mathfrak{S}^* = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^* = 1.$$

Wenn wir zur Abkürzung noch

$$\mathfrak{M}^* := \mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{A}$$

setzen, erhalten wir

(2.11.) $$\mathfrak{K};\Omega = \mathfrak{N};\Omega \times \mathfrak{M}^*;\Omega .$$

Da $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}^*$ Gruppen ohne Zentrum sind ($\mathfrak{N}^*$ wieder wegen Satz 2.2.1.), ist auch $\mathfrak{K}$ eine Gruppe ohne Zentrum.

Zu zeigen ist noch, daß $\mathfrak{K}$ Ω-vollreduzibel ist. Dazu sei $\mathfrak{L};\Omega$ ein Normalteiler von $\mathfrak{K};\Omega$.

Wieder erhalten wir Zerlegungen

(2.12.) $\mathfrak{M};\Omega = (\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{M});\Omega \times \mathfrak{L}_1;\Omega$

(2.13.) $\mathfrak{M}^*;\Omega = (\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{M}^*);\Omega \times \mathfrak{L}_1^*;\Omega$,

wobei $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{M} \leq \mathfrak{E}) \wedge \mathfrak{M}$

und $\mathfrak{L}_1^* = \mathfrak{z}(\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{M}^* \leq \mathfrak{E}) \wedge \mathfrak{M}^*$

Ω-zulässige Normalteiler von $\mathfrak{E};\Omega$ sind.

Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \wedge \mathfrak{M} \wedge \mathfrak{L}_1 = 1$$

$$\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{L}_1^* = \mathfrak{L} \wedge \mathfrak{M}^* \wedge \mathfrak{L}_1^* = 1.$$

Aufgrund einer bekannten Kommutatorbeziehung folgt weiter

$$\left[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_1^*\right] = \left[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_1\right] \cdot \left[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_1^*\right] \leq (\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{L}_1)(\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{L}^*) = E,$$

d.h. $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_1^*$ gehört dem Ω-Zentralisator $\mathfrak{L}^* := \mathfrak{z}(\mathfrak{L} \leq \mathfrak{E});\Omega$ an. (2.11.), (2.12.) und (2.13.) ergeben nun zusammen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}^* = (\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{M}) \times (\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{M}^*) \times \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_1^* \leq \mathfrak{L}\mathfrak{L}^* \leq \mathfrak{E},$$

insbesondere also

$$\mathfrak{E};\Omega = \mathfrak{L};\Omega \cdot \mathfrak{L}^*;\Omega .$$

Diese Zerlegung ist wegen

$$\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{L}^* \cong \mathfrak{z}(\mathfrak{E}) = 1$$

aber direkt:

$$\mathfrak{E};\Omega = \mathfrak{L};\Omega \times \mathfrak{L}^*;\Omega \qquad \text{q.e.d.}$$

Satz 2.2. zieht wieder nach SPECHT [1], Satz 1.4.27*) nach sich

2.2.* Satz: Die Menge der Ω-vollreduziblen Normalteiler ohne Zentrum einer Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ist ein abgeschlossener Verband. Der einzige maximale Ω-vollreduzible Normalteiler $\mathfrak{V};\Omega$ ohne Zentrum ist Ω-charakteristisch in $\mathfrak{G};\Omega$.

Bevor wir auf die Strukturzusammenhänge zwischen Ω-halbeinfachen und Ω-vollreduziblen Gruppen eingehen, wenden wir uns Strukturfragen bei Ω-vollreduziblen Gruppen zu.

Bei endlichen Gruppen ohne Operatoren ist die Vollreduzibilität einer Gruppe *) ohne Zentrum gleichwertig mit der Darstellbarkeit der Gruppe als direktes Produkt einfacher nichtabelscher Gruppen (FITTING [1], Hilfssatz 5).
Bei unendlichen Gruppen (mit Operatoren) haben wir:

2.5. Satz: Jede Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$, welche direktes Produkt

$$\mathfrak{G};\Omega = \times \mathfrak{P}_\iota;\Omega \qquad (\iota \text{ über } I)$$

Ω-einfacher Gruppen ohne Zentrum ist, ist eine Ω-vollreduzible Gruppe ohne Zentrum.

Beweis: Nach Satz 2.2.* ist $\mathfrak{G};\Omega$ gleich seinem maximalen Ω-vollreduziblen Normalteiler ohne Zentrum.

Wir wollen nun untersuchen, welche Endlichkeitsbedingungen wir einer Ω-vollreduziblen Gruppe ohne Zentrum auferlegen müssen, damit sie umgekehrt als direktes Produkt Ω-einfacher Gruppen ohne Zentrum darstellbar ist.

Jeder Ω-einfache Normalteiler einer solchen Gruppe ist jedenfalls ein minimaler Ω-Normalteiler (Satz 2.2.1.). Umgekehrt ist aber jeder minimale Ω-Normalteiler auch Ω-einfach. Die Forderung der Existenz Ω-einfacher Normalteiler läuft also auf die Forderung der Existenz minimaler Normalteiler hinaus.

*) Def. 4.1.

Um die Situation genauer beschreiben zu können, erinnern wir an folgende Begriffe:

Eine bezüglich der Relation $x \leq y$ teilweise geordnete Menge M genügt der Maximalbedingung (bzw. Minimalbedingung), wenn jede nicht-leere Teilmenge ein maximales (bzw. minimales) Element besitzt.

W. SPECHT ([1], S. 111) hat folgende Abschwächungen eingeführt:

Eine teilweise geordnete Menge M genügt der schwachen Maximalbedingung (bzw. schwachen Minimalbedingung), wenn jedes halboffene Intervall $a \leq x < b$ (bzw. $a < x \leq b$) ein maximales (bzw. minimales) Element besitzt.

Diese Begriffe können insbesondere für jede Teilmenge des Verbandes der Ω-zulässigen Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ verwendet werden.

Es gilt der folgende Satz:

2.6. Satz: Für eine Ω-vollreduzible Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ohne Zentrum sind folgende drei Aussagen gleichwertig:

1. Die Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ist direktes Produkt
$$\mathfrak{G};\Omega = \times \mathfrak{F}_\iota;\Omega \qquad (\iota \text{ über } I)$$
einer Menge Ω-einfacher Gruppen $\mathfrak{F}_\iota;\Omega$ ohne Zentrum. *)
2. Der Ω-Normalteilerverband $N(\mathfrak{G};\Omega)$ der Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ genügt der schwachen Maximalbedingung.
3. Der Ω-Normalteilerverband $N(\mathfrak{G};\Omega)$ der Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ genügt der schwachen Minimalbedingung.

Beweis: Wir schicken der Übersichtlichkeit halber folgendes

*) O.B.d.A. nehmen wir im Folgenden stets $\mathfrak{F}_\iota;\Omega \neq 1$ an.

Lemma voraus:

2.7. Lemma: Die Ω-vollreduzible Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ohne Zentrum sei direktes Produkt

$$\mathfrak{G};\Omega = \times \mathfrak{k}_\iota;\Omega \qquad (\iota \text{ über } I) \tag{2.14.}$$

einer Menge (nichttrivialer) Ω-einfacher Gruppen $\mathfrak{k}_\iota;\Omega$.

Dann existiert zu jedem Ω-Normalteiler $\mathfrak{N};\Omega$ von $\mathfrak{G};\Omega$ eine eindeutig bestimmte Teilmenge $I^* \subseteq I$ mit

$$\mathfrak{N};\Omega = \times \mathfrak{k}_\iota;\Omega \qquad (\iota \text{ über } I^*).$$

Beweis des Lemma: Wir haben zunächst eine Zerlegung

$$\mathfrak{G};\Omega = \mathfrak{N};\Omega \times \mathfrak{N}^*;\Omega. \tag{2.15.}$$

Weiter besteht für jedes $\iota \in I$ die Alternative

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{k}_\iota = \mathfrak{k}_\iota \tag{2.16.}$$

oder

$$\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{k}_\iota = \mathfrak{k}_\iota \tag{2.17.}$$

Beide Beziehungen können nämlich wegen (2.15.) nicht gelten. Ist (2.16.) nicht erfüllt, muß wegen der Ω-Einfachheit von $\mathfrak{k}_\iota;\Omega$

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{k}_\iota = 1$$

sein. Dann gehört aber $\mathfrak{k}_\iota$ zum Ω-Zentralisator $\mathfrak{N}^*;\Omega$ von $\mathfrak{N};\Omega$ in $\mathfrak{G};\Omega$, d.h. (2.17.) gilt.

Wir ziehen nun den starken Verfeinerungssatz für direkte Zerlegungen (SPECHT [1], Satz 2.3.10) heran.

Die Durchschnittsbedingungen

$$\mathfrak{N}\mathfrak{k}_\iota \cap \mathfrak{N}\mathfrak{k}_\iota^* \cap \mathfrak{N}^*\mathfrak{k}_\iota \cap \mathfrak{N}^*\mathfrak{k}_\iota^* = 1 \qquad \text{für jedes } \iota \in I \tag{2.18.}$$

sind nämlich erfüllt ($\mathfrak{k}_\iota^*$ bezeichnet dabei den zu $\mathfrak{k}_\iota$ kom-

plementären Faktor in der Zerlegung (2.14.)).

Wir beweisen (2.18.) durch eine Fallunterscheidung.

Bei Gültigkeit von (2.16.) hat man noch

$$\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{P}_\iota^*$$

und die linke Seite von (2.18.) reduziert sich auf

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{P}_\iota^* \cap \mathfrak{A}^* \mathfrak{P}_\iota \cap \mathfrak{P}_\iota^* \subseteq \mathfrak{P}_\iota^* \cap \mathfrak{P}_\iota = 1,$$

da nach dem Dedekindschen Lemma

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^* \mathfrak{P}_\iota = \mathfrak{P}_\iota(\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A}) = \mathfrak{P}_\iota$$

gilt.

Ähnlich schließt man im Falle (2.17.).

Der starke Verfeinerungssatz besagt nun das Bestehen einer gemeinsamen Verfeinerung von (2.14.) und (2.15.)

$$\mathfrak{o}_f;\Omega = \left(\bigtimes_{\iota\in\mathfrak{I}} \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}_\iota\right) \times \left(\bigtimes_{\iota\in\mathfrak{I}} \mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{P}_\iota\right).$$

Wenn wir

$$\mathfrak{I}^* := \{\iota \in \mathfrak{I} \mid \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}_\iota = \mathfrak{P}_\iota\}$$

setzen, erhalten wir

$$\mathfrak{o}_f;\Omega = \left(\bigtimes_{\iota\in\mathfrak{I}^*} \mathfrak{P}_\iota\right) \times \left(\bigtimes_{\iota\in\mathfrak{I}-\mathfrak{I}^*} \mathfrak{P}_\iota\right)$$

und

$$\mathfrak{A};\Omega = \bigtimes_{\iota\in\mathfrak{I}^*} \mathfrak{P}_\iota;\Omega .$$

$\mathfrak{I}^*$ ist offenbar eindeutig bestimmt.

Nun zum Beweis unseres Satzes.

1. $\longrightarrow$ 2.

Sei $\mathfrak{A}_1;\Omega \subseteq \mathfrak{A};\Omega \subset \mathfrak{A}_2;\Omega$ ein halboffenes Intervall des Ver-

bandes $N(\mathfrak{G};\Omega)$.

Nach Lemma 2.7. gilt

$$\mathfrak{A}_1;\Omega = \times_\iota \mathfrak{A}_\iota;\Omega \qquad (\iota \text{ über } I_1 \leq I)$$
$$\mathfrak{A}_2;\Omega = \times \mathfrak{A}_\iota;\Omega \qquad (\iota \text{ über } I_2 < I).$$

Wegen $\mathfrak{A}_1;\Omega < \mathfrak{A}_2;\Omega$ gilt $I_1 \leq I_2$ und $I_2 - I_1 \neq \emptyset$.
Wir wählen ein ι_0 aus $I_2 - I_1$ und setzen

$$\mathfrak{A}_3;\Omega := \times \mathfrak{A}_\iota;\Omega \qquad (\iota \text{ über } I_2,\ \iota \neq \iota_0).$$

$\mathfrak{A}_3;\Omega$ ist nach Lemma 2.7. im Abschnitt $\mathfrak{A}_1;\Omega \leq \mathfrak{A};\Omega < \mathfrak{A}_2;\Omega$ maximal, da es keine Indexmenge I_4 mit $I_3 < I_4 < I_2$ gibt.

2. $\longrightarrow$ 3.

Wir betrachten folgende Abbildung φ von $N(\mathfrak{G};\Omega)$ auf sich:

$$\varphi: N(\mathfrak{G};\Omega) \longrightarrow N(\mathfrak{G};\Omega)$$
$$\mathfrak{A};\Omega \longrightarrow \mathfrak{A}^*;\Omega,$$

wo $\mathfrak{A}^*;\Omega$ der Ω-Zentralisator von $\mathfrak{A};\Omega$ in $\mathfrak{G};\Omega$ ist.
Wegen $\varphi^2 = \varepsilon$ ist φ eine eineindeutige Abbildung von $N(\mathfrak{G};\Omega)$ auf sich.

Für Elemente $\mathfrak{A};\Omega$, $\mathfrak{B}\mathfrak{A};\Omega \in N(\mathfrak{G};\Omega)$ mit $\mathfrak{A};\Omega \leq \mathfrak{B}\mathfrak{A};\Omega$ folgt

$$\varphi(\mathfrak{A};\Omega) \geq \varphi(\mathfrak{B}\mathfrak{A};\Omega)$$

d.h. φ ist ein Antiautomorphismus des Verbandes $N(\mathfrak{G};\Omega)$.
Da jedes halboffene Intervall $\mathfrak{A}_1;\Omega \leq \mathfrak{A};\Omega < \mathfrak{A}_2;\Omega$ durch φ auf ein halboffenes Intervall $\mathfrak{A}_1^*;\Omega \geq \mathfrak{A}^*;\Omega > \mathfrak{A}_2^*;\Omega$ abgebildet wird und umgekehrt, sind im Verband $N(\mathfrak{G};\Omega)$ die schwache Maximalbedingung und die schwache Minimalbedingung äquivalent.

3. $\longrightarrow$ 1.

Im Falle der schwachen Minimalbedingung existieren nichttriviale Ω-einfache Normalteiler. Der Ω-Sockel $\mathfrak{F};\Omega$ der Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ist als Kompositum aller minimalen Normalteiler von

$\mathfrak{G};\Omega$ direktes Produkt

(2.19.) $\mathfrak{T};\Omega = \times \mathfrak{H}_\iota;\Omega$ (über)

einer Menge Ω-einfacher Normalteiler $\mathfrak{H}_\iota;\Omega$ von $\mathfrak{G};\Omega$.

$\mathfrak{T};\Omega$ induziert als Ω-zulässiger Normalteiler in $\mathfrak{G};\Omega$ eine Zerlegung $\mathfrak{G};\Omega = \mathfrak{T};\Omega \times \mathfrak{T}^*;\Omega$.

Wäre nun $\mathfrak{T}^* \neq 1$, so müßte, da sich wegen Folgerung 2.3. die schwache Minimalbedingung für $N(\mathfrak{G};\Omega)$ auf den Verband $N(\mathfrak{T}^*;\Omega)$ vererbt, in $\mathfrak{T}^*;\Omega$ ein (nichttrivialer) minimaler Normalteiler $\mathfrak{R};\Omega \triangleleft \mathfrak{G};\Omega$ existieren, was im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{T};\Omega$ steht.

Insgesamt ist also gezeigt

$$\mathfrak{G};\Omega = \times \mathfrak{H}_\iota;\Omega \qquad (\iota \text{über } \mathfrak{I}).$$

Die Aussage des Satzes 2.6. läßt sich noch verschärfen, wenn man durch stärkere Endlichkeitsforderungen die Klasse der in Frage kommenden Gruppen weiter einengt.

Aus Satz 2.6. folgt leicht:

2.8. Satz: Für eine Ω-vollreduzible Gruppe $\mathfrak{G};\Omega$ ohne Zentrum sind folgende vier Aussagen äquivalent:

1. $\mathfrak{G};\Omega$ ist direktes Produkt
$$\mathfrak{G};\Omega = \mathfrak{H}_1;\Omega \times \ldots \times \mathfrak{H}_n;\Omega$$
endlich vieler Ω-einfacher Gruppen $\mathfrak{H}_\iota;\Omega$ ohne Zentrum.
2. Der Normalteilerverband $N(\mathfrak{G};\Omega)$ genügt der Maximalbedingung.
3. Der Normalteilerverband $N(\mathfrak{G};\Omega)$ genügt der Minimalbedingung.
4. Der Normalteilerverband $N(\mathfrak{G};\Omega)$ ist endlich.

3. Zusammenhang zwischen Ω-vollreduziblen und Ω-halbeinfachen Gruppen

Eine Ω-vollreduzible Gruppe $\mathfrak{V};\Omega$ ohne Zentrum besitzt keinen abelschen Ω-Normalteiler $\neq 1$, ist also Ω-halbeinfach.

Wenn wir mit $J(\mathfrak{V})$ die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{V}$, mit $A(\mathfrak{V})$ die Gruppe aller Automorphismen von bezeichnen, ist $J(\mathfrak{V})$ Normalteiler in $A(\mathfrak{V})$ und es besteht die Isomorphie

$$(3.1.) \qquad J(\mathfrak{V}) \cong \mathfrak{V}.$$

Vermöge der Erklärung

$$(3.2.) \qquad (\tau(X))^{\omega} := \tau(X^{\omega}) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega \text{ und alle } \tau(X) \in J(\mathfrak{V})$$

wird $J(\mathfrak{V})$ zu einer Ω-Gruppe $J(\mathfrak{V});\Omega$ und (3.1.) wird eine Ω-Isomorphie:

$$(3.3.) \qquad J(\mathfrak{V});\Omega \overset{\Omega}{\cong} \mathfrak{V};\Omega .$$

Wir erhalten folgendes Analogon zum endlichen Fall:

3.1. Satz: Es sei $\mathfrak{V};\Omega$ eine Ω-vollreduzible Gruppe ohne Zentrum. Der vermöge (3.2.) auf $J(\mathfrak{V})$ erklärte Operatorbereich lasse sich auf $A(\mathfrak{V})$ fortsetzen: $A(\mathfrak{V});\Omega$.

Dann ist jede Zwischengruppe $H;\Omega$ des Intervalls

$$J(\mathfrak{V});\Omega \leq H;\Omega \leq A(\mathfrak{V});\Omega$$

eine Ω-halbeinfache Gruppe, die $J(\mathfrak{V});\Omega$ als maximalen Ω-vollreduziblen Normalteiler ohne Zentrum besitzt.

Zwischengruppen

$$J(\mathfrak{N});\Omega \leq H;\Omega \leq A(\mathfrak{N});\Omega$$

und

$$J(\mathfrak{N});\Omega \leq H^*;\Omega \leq A(\mathfrak{N});\Omega$$

sind genau dann Ω-isomorph, wenn sie in $A(\mathfrak{N});\Omega$ Ω-konjugiert sind.

Beweis: Die entscheidende Rolle kommt dabei folgendem Lemma zu (SPECHT [1], S.97):

3.2. Lemma: $\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe ohne Zentrum.
Dann besteht der Zentralisator von $J(\mathfrak{G})$ in $A(\mathfrak{G})$ nur aus dem identischen Automorphismus ε.

Sei nun $H;\Omega$ eine Zwischengruppe

$$J(\mathfrak{N});\Omega \leq H;\Omega \leq A(\mathfrak{N});\Omega$$

und $N;\Omega$ ein abelscher Normalteiler von $H;\Omega$. Da $J(\mathfrak{N});\Omega$ keinen abelschen Ω-Normalteiler $\neq 1$ besitzt, gilt

$$\left[N, J(\mathfrak{N})\right] \leq N \cap J(\mathfrak{N}) = \{\varepsilon\}.$$

N gehört also zum Zentralisator von $J(\mathfrak{N})$ in $A(\mathfrak{N})$.
Lemma 3.2. liefert

$$N = 1,$$

was $H;\Omega$ als Ω-halbeinfach charakterisiert.

Wäre $J(\mathfrak{N});\Omega$ im maximalen Ω-vollreduziblen Normalteiler $M;\Omega$ ohne Zentrum von $H;\Omega$ echt enthalten, so würde eine Zerlegung

$$M;\Omega = J(\mathfrak{N});\Omega \times J^*(\mathfrak{N});\Omega$$

existieren, mit $J^*(\mathfrak{N}) \neq 1$, was ebenfalls wegen Lemma 3.2. nicht möglich ist.

$H;\Omega$ und $H^*;\Omega$ seien zwei Zwischengruppen, zwischen denen ein Ω-Isomorphismus α bestehe:

$$\alpha: \eta \overset{\Omega}{\longleftrightarrow} \eta^\alpha = \eta^* \in H^* \quad \text{für jedes } \eta \in H$$

und

$$\eta^{\omega\alpha} = \eta^{\alpha\omega} \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega \text{ und alle } \eta \in H.$$

α bildet den $H;\Omega$ und $H^*;\Omega$ gemeinsamen maximalen Ω-vollreduziblen Normalteiler ohne Zentrum $J(\mathfrak{V});\Omega$ auf sich ab, induziert also in $J(\mathfrak{V});\Omega$ und über (3.3.) auch in $\mathfrak{V};\Omega$ einen Ω-Automorphismus:

$$\alpha: \quad J(\mathfrak{V});\Omega \longrightarrow J(\mathfrak{V});\Omega$$
$$\tau(X) \longrightarrow \tau(X^{\alpha_0}) \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{V},$$

wobei $\alpha_0 \in A(\mathfrak{V})$ ein Ω-Automorphismus ist.
Nun gilt für jedes $\eta \in H \leq A(\mathfrak{V})$ und für jedes $\tau(X) \in J(\mathfrak{V})$

$$(\tau(X^\eta))^\alpha = \tau(X^{\eta\alpha_0}) = \eta^{-\alpha_0}\tau(X^{\alpha_0})\eta^{\alpha_0} =$$

$$= (\eta^{-1}\tau(X)\eta)^\alpha = \eta^{-\alpha}\tau(X^{\alpha_0})\eta^\alpha$$

und damit weiter

$$\eta^\alpha \eta^{-\alpha_0}\tau(X) = \tau(X)\eta^\alpha\eta^{-\alpha_0} \qquad \text{für jedes } X \in \mathfrak{V}.$$

Lemma 3.2. führt jetzt auf

$$\eta^\alpha \eta^{-\alpha_0} = \varepsilon$$

oder

$$\eta^\alpha = \eta^{\alpha_0}.$$

4. Anwendung auf Gruppen ohne Operatoren

Eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G}$ ohne Operatoren kann einmal in trivialer Weise als Gruppe mit dem Operatorbereich $\{\varepsilon\}$ aufgefaßt werden, andererseits stellt die innere Automorphismengruppe $J = J(\mathfrak{G})$ einen Operatorbereich für $\mathfrak{G}$ dar.
Beide Operatorbereiche sind schwach normal, d.h. jeder Normalteiler ist zulässig.

4.1. Definition:

1. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt halbeinfach, wenn $\mathfrak{G};\{\varepsilon\}$ $\{\varepsilon\}$-halbeinfach ist.
2. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt vollreduzibel, wenn $\mathfrak{G};\{\varepsilon\}$ $\{\varepsilon\}$-vollreduzibel ist.

4.2. Bemerkungen

1. Für Gruppen $\mathfrak{G};\Omega$ mit schwach normalem Operatorbereich gilt offenbar:
   $\mathfrak{G};\Omega$ ist Ω-halbeinfach genau dann, wenn $\mathfrak{G}$ halbeinfach ist.
   $\mathfrak{G};\Omega$ ist Ω-vollreduzibel genau dann, wenn $\mathfrak{G}$ vollreduzibel ist.
2. $\mathfrak{G}$ ist halbeinfach genau dann, wenn in $\mathfrak{G}$ kein abelscher Normalteiler $\neq 1$ existiert.

Satz 1.2.* liefert dann

4.3. Satz: In jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ existiert ein einziger maximaler

$J(\mathfrak{G})$-metabelscher Normalteiler $\mathfrak{A}$, der in $\mathfrak{G}$ charakteristisch ist.

Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ist halbeinfach.

4.4. Bemerkung

Für endliche Gruppen ist der Begriff $J(\mathfrak{G})$-metabelsch von der Einbettung in eine Obergruppe unabhängig und erweist sich als gleichwertig mit der Auflösbarkeit, da bei ihnen aus der Existenz bereits einer Normalfolge mit abelschen Faktoren die Existenz einer charakteristischen Folge mit abelschen Faktoren folgt.

Das 2. Kapitel der Arbeit beinhaltet Aussagen über vollreduzible Gruppen, wobei es nach Bemerkung 4.2.1. gleichgültig ist, ob wir $\mathfrak{W};\{\epsilon\}$ oder $\mathfrak{W};J(\mathfrak{W})$ betrachten.
Die für uns interessanten Fragen sind die Strukturzusammenhänge zwischen halbeinfachen und vollreduziblen Gruppen, deren Behandlung wir uns jetzt zuwenden wollen.

Zunächst entnehmen wir den Sätzen 2.2.* und 3.1. ($\Omega = \{\epsilon\}$):

4.5. Satz: Jede halbeinfache Gruppe $\mathfrak{H}$ besitzt einen einzigen maximalen vollreduziblen Normalteiler $\mathfrak{W}$ (ohne Zentrum), der in $\mathfrak{H}$ charakteristisch ist.

Jede Zwischengruppe H des Intervalls

$$J(\mathfrak{W}) \leq H \leq A(\mathfrak{W})$$

ist eine halbeinfache Gruppe, die $J(\mathfrak{W}) \cong \mathfrak{W}$ als maximalen vollreduziblen Normalteiler besitzt.

Zwischengruppen H und H^* sind genau dann isomorph, wenn sie in $A(\mathfrak{V})$ konjugiert sind.

Einen engeren Begriff "halbeinfach" hat P.A. GOLBERG [1] eingeführt:

4.6. Definition: Eine Gruppe heißt stark halbeinfach, wenn der Zentralisator des maximalen vollreduziblen Normalteilers ohne Zentrum die Eins ist.

4.7. Bemerkungen

1. Jede stark halbeinfache Gruppe $\mathfrak{G}$ ist halbeinfach, da ein abelscher Normalteiler $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{G}$ mit dem maximalen vollreduziblen Normalteiler $\mathfrak{V}$ ohne Zentrum den Durchschnitt
$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{V} = 1$$
haben muß, also zum Zentralisator von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{G}$ gehört, woraus sich $\mathfrak{A} = 1$ ergibt.
2. Nicht jede halbeinfache Gruppe ist stark halbeinfach. Beispiele: Die freien Gruppen $\mathfrak{F}^n$ vom Range $n \geq 2$. In diesen Gruppen existiert kein abelscher Normalteiler $\neq 1$, der maximale vollreduzible Normalteiler ist die Eins, so daß $\mathfrak{Z}(\mathfrak{V} \leq \mathfrak{F}^n) = \mathfrak{F}^n \neq 1$.

Wir stoßen auf die stark halbeinfachen Gruppen, wenn wir erreichen wollen, daß die halbeinfache Gruppe $\mathfrak{G}$ selbst einer Zwischengruppe H mit
$$J(\mathfrak{V}) \leq H \leq A(\mathfrak{V})$$
isomorph ist.

Die Zuordnung

$$H \longrightarrow \nu(\mathfrak{N}, H) \qquad \text{für alle } H \in \mathfrak{H}$$

stellt einen Homomorphismus von $\mathfrak{H}$ in eine $J(\mathfrak{N})$ umfassende Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $A(\mathfrak{N})$ dar mit dem Kern $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H})$ (SPECHT [1], S. 421).

Es gilt

4.8. Satz: (P.A. GOLBERG [1]): Jede stark halbeinfache Gruppe $\mathfrak{H}$ mit dem maximalen vollreduziblen Normalteiler $\mathfrak{N}$ ist einer Zwischengruppe $\mathfrak{H}$

$$J(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq A(\mathfrak{N})$$

isomorph.

4.9. Bemerkung

Durch die Sätze 4.5. und 4.8. wird die Struktur der stark halbeinfachen Gruppen auf die Struktur der vollreduziblen Gruppen ohne Zentrum und deren Automorphismengruppen zurückgeführt. Wie im Falle vollreduzibler Gruppen, die als direkte Produkte einfacher nichtabelscher Gruppen darstellbar sind, die Automorphismengruppe $A(\mathfrak{N})$ durch die Automorphismengruppen der einfachen Faktoren beschrieben wird, ersieht man leicht aus FITTING [1], Sätze 11 und 12, oder entnimmt es direkt GOLBERG [1], Theoreme 7 und 8.

Es stellt sich nun sofort die Frage, welche halbeinfachen Gruppen stark halbeinfach sind. Der folgende Satz gibt eine hinreichende Endlichkeitsbedingung dafür an.

4.10. Satz: Wenn in einer (nichttrivialen) halbeinfachen

Gruppe $\mathfrak{H}$ der Normalteilerverband jeder charakteristischen Untergruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{H}$ die schwache Minimalbedingung erfüllt, dann gilt:

1. $\mathfrak{H}$ ist stark halbeinfach.
2. Der (notwendig nichttriviale) maximale vollreduzible Normalteiler $\mathfrak{V}$ ist der Sockel von $\mathfrak{H}$.

Beweis: Wir schicken zunächst eine allgemeine Betrachtung voraus.

Wegen der Halbeinfachheit von $\mathfrak{H}$ gilt für den Durchschnitt einer charakteristischen Untergruppe $\mathfrak{L} \trianglelefteq \mathfrak{H}$ mit ihrem Zentralisator $\mathfrak{L}^* := \mathfrak{z}(\mathfrak{L} \leq \mathfrak{H})$

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^* = 1 \qquad (4.1.)$$

$\mathfrak{L}^*$ ist ebenfalls charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Falls $\mathfrak{L}^* \neq 1$, besitzt $\mathfrak{L}^*$ minimale Normalteiler $\neq 1$ und somit auch einen (nichttrivialen) Sockel $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}^*)$, welcher direktes Produkt

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{L}^*) = \times \mathfrak{M}_\iota \qquad (\iota \text{ über } \mathfrak{I}) \qquad (4.2.)$$

minimaler Normalteiler $\mathfrak{M}_\iota \trianglelefteq \mathfrak{L}^*$ ist.

$\mathfrak{S}(\mathfrak{L}^*)$ erfüllt als charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ebenfalls die schwache Minimalbedingung für Normalteiler.

Diese Bedingung überträgt sich auf $\mathfrak{M}_\iota$ (für alle $\iota \in \mathfrak{I}$), da — wie aus (4.2.) folgt — jeder Normalteiler von $\mathfrak{M}_\iota$ (für alle $\iota \in \mathfrak{I}$) auch Normalteiler von $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}^*)$ ist.

Jedes $\mathfrak{M}_\iota$ besitzt somit einen (nichttrivialen) Sockel $\mathfrak{S}_\iota$, der Normalteiler von $\mathfrak{L}^*$ ist. Aus der Minimalität von $\mathfrak{M}_\iota$ folgt aber, daß für jedes ι

$$\mathfrak{M}_\iota = \mathfrak{S}_\iota$$

ist.

Wir haben damit die Zerlegung

$$(4.3.) \qquad \mathfrak{M}_\iota = \times \mathfrak{M}_{\iota\nu} \qquad (\nu \text{ über } N_\iota \text{ , für alle } \iota \in I)$$

wobei jedes $\mathfrak{M}_{\iota\nu}$ ein einfacher Normalteiler von $\mathfrak{M}_\iota = \mathfrak{X}_\iota$ ist.
Der Sockel $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}^*)$ ist also vollreduzibel (ohne Zentrum):

$$(4.4.) \qquad \mathfrak{S}(\mathfrak{L}^*) = \times_{\iota \in I} \left(\times_{\iota \in N_\iota} \mathfrak{M}_{\iota\nu} \right)$$

und es gilt

$$(4.5.) \qquad \mathfrak{S}(\mathfrak{L}^*) \subseteq \mathfrak{V}.$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung des Satzes wählen wir nun $\mathfrak{L} = 1$ ($\mathfrak{L}^* = \mathfrak{H}$). (4.5.) liefert

$$\mathfrak{X} := \mathfrak{S}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{V}.$$

Wäre nun in der Zerlegung

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^*$$

$\mathfrak{X}^* \neq 1$, so enthielte $\mathfrak{X}^*$ einen minimalen Normalteiler $\neq 1$ von $\mathfrak{H}$, was unmöglich ist, da $\mathfrak{X}$ alle minimalen Normalteiler von $\mathfrak{H}$ enthält.
Somit

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{V}.$$

Für die erste Behauptung setzen wir $\mathfrak{L} = \mathfrak{V}$. Wäre $\mathfrak{V}^* \neq 1$, so auch $\mathfrak{S}(\mathfrak{V}^*)$. Aus (4.5.) folgt einerseits

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{V}^*) \cap \mathfrak{V} = \mathfrak{S}(\mathfrak{V}^*) \neq 1,$$

aus (4.1.) andererseits

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{V}^*) \cap \mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{V}^* \cap \mathfrak{V} = 1,$$

was zueinander im Widerspruch steht. Mithin gilt

$$\mathfrak{V}^* = 1,$$

d.h. $\mathfrak{H}$ ist stark halbeinfach.

4.11. Bemerkung

Die Bedingungen des Satzes sind für alle halbeinfachen Gruppen mit Minimalbedingung für den Untergruppenverband erfüllt.

5. Auflösbare und hyperzentrale Gruppen

Nach der Untersuchung der halbeinfachen Gruppen befassen wir uns nun mit den J-metabelschen Gruppen. Für diese Zwecke ist es bequem, sich von der relativen Gruppeneigenschaft "J-metabelsch" zu lösen und die weitere Klasse der auflösbaren Gruppen in Betracht zu ziehen.

5.1. Definition: (R. BAER [1]): Eine Gruppe $\mathfrak{A}$ heißt auflösbar, wenn sie eine Normalteilerfolge $(\mathfrak{A}_\nu)$ mit abelschen Faktoren besitzt. In diesem Falle heißt $(\mathfrak{A}_\nu)$ eine auflösbare Folge von $\mathfrak{A}$.

5.2. Bemerkungen

1. Nach Bemerkung 4.4. stimmt dieser Begriff bei endlichen Gruppen mit dem üblichen überein.
2. Eine Gruppe $\mathfrak{A}$ ist genau dann auflösbar, wenn sie $J(\mathfrak{A})$-metabelsch ist.
3. Man hat das Kriterium: Eine Gruppe ist genau dann auflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{A}}$ einen von 1 verschiedenen abelschen Normalteiler besitzt (SPECHT [1], S. 341).

5.3. Definition (R. BAER): Eine Gruppe $\mathfrak{A}$ heißt hyperzentral, wenn sie gleich ihrem Hyperzentrum ist.

5.4. Bemerkungen

1. Es gilt das Kriterium: Eine Gruppe $\mathfrak{A}$ ist genau dann

hyperzentral, wenn jedes homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{A}} \neq 1$ ein von 1 verschiedenes Zentrum besitzt (SPECHT [1], Satz 3.1.34*).

2. Für endliche Gruppen fällt die Klasse der hyperzentralen mit der Klasse der nilpotenten zusammen.

Die Strukturfrage der ordnungsfiniten hyperzentralen Gruppen läßt sich bekanntlich reduzieren (SPECHT [1], Satz 3.2.10.):

Eine ordnungsfinite Gruppe ist genau dann hyperzentral, wenn sie direktes Produkt hyperzentraler p-Gruppen ist.

Dies legt es nahe, wie bei endlichen Gruppen zu versuchen, die Struktur auflösbarer Gruppen auf hyperzentrale zurückzuführen.
Nun ist zwar jedes homomorphe Bild einer jeden Untergruppe einer hyperzentralen Gruppe hyperzentral, aber das Kompositum einer Menge hyperzentraler Normalteiler ist i.a. kein hyperzentraler Normalteiler mehr, so daß man i.a. keinen maximalen hyperzentralen Normalteiler zur Verfügung hat (Beispiel 5.12. unten).

Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit zeigte B.I. PLOTKIN [1].

5.5. Definition: Eine Gruppe $\mathfrak{A}$ heißt lokalhyperzentral *), wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe hyperzentral ist.

Die Eigenschaft "lokalhyperzentral" leistet das Verlangte:

5.6. Satz:

1. Jedes homomorphe Bild jeder Untergruppe einer lokal-

*) Die Eigenschaft "lokalhyperzentral" ist gleichwertig mit der Eigenschaft "lokalnilpotent" i.S. von PLOTKIN und M^{c} LAIN

hyperzentralen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist lokalhyperzentral.

2. Die Vereinigung $\bigcup \mathfrak{U} = \mathfrak{V}$ einer Kette lokalhyperzentraler Untergruppen $\mathfrak{U}$ ist lokalhyperzentral.
3. Das Kompositum $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$ zweier lokalhyperzentraler Normalteiler $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist lokalhyperzentral.

Zum Beweis der dritten Behauptung verweisen wir auf PLOTKIN [1], Lemma 6.

Es folgt

5.6.* Satz (PLOTKIN [1]): Die Menge der lokalhyperzentralen Normalteiler einer Gruppe $\mathfrak{G}$ bildet einen abgeschlossenen Verband. Der einzige maximale lokalhyperzentrale Normalteiler $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$, das PLOTKIN-Radikal, ist charakteristisch in $\mathfrak{G}$.

Wir führen nun analog zu endlichen Gruppen die Struktur einer auflösbaren Gruppe $\mathfrak{A}$ auf die Struktur ihres PLOTKIN-Radikals zurück. Entscheidend dabei ist das folgende Lemma, das in allgemeinerer Form von PLOTKIN [1] bewiesen wurde. Für auflösbare Gruppen spezialisiert beruht der PLOTKINsche Beweis auf der Tatsache, daß eine auflösbare Gruppe durch die iterierte Folge der PLOTKIN-Radikale ausgeschöpft wird. Wir holen nicht so weit aus, sondern geben einen einfachen direkten Beweis.

5.7. Lemma: Der Zentralisator $\mathfrak{z}$ des PLOTKIN- Radikals $\mathfrak{R}$ einer auflösbaren Gruppe $\mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{R}$ enthalten.

Beweis: $\mathfrak{z}$ ist Normalteiler in der $J(\mathfrak{A})$-metabelschen Gruppe $\mathfrak{A}$, also selbst $J(\mathfrak{A})$-metabelsch. Somit existiert eine Folge $(\mathfrak{A}_\nu)$ mit folgenden Eigenschaften:

(5.1.) $E = \mathfrak{A}_0 \leq \mathfrak{A}_1 \leq \ldots \leq \mathfrak{A}_\nu \leq \ldots \leq \mathfrak{A}_\sigma = \mathfrak{z} \qquad (\sigma \in \Lambda)$

(5.2.) $\mathfrak{A}_\nu \leq \mathfrak{A}_{\nu+1} \trianglelefteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{\nu+1}/\mathfrak{A}_\nu$ abelsch für alle $\nu < \sigma$

(5.3.) $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{A}_\nu$ für jeden Limesindex $\lambda \leq \sigma$

Wir nehmen an, es sei

(*) $\qquad \mathfrak{z} \not\leq \mathfrak{N}$

Wegen $E = \mathfrak{A}_0 \leq \mathfrak{N}$ und der Wohlordnung von Λ existiert dann ein minimaler Index $\mu \neq 0$ so, daß

(5.6.) $\qquad \mathfrak{A}_\mu \not\leq \mathfrak{N}$

μ kann nicht Limesindex sein. Für den Vorgänger $\mu - 1$ gilt

(5.7.) $\qquad \mathfrak{A}_{\mu-1} \leq \mathfrak{N}$

Aus (5.1.) folgt damit

(5.8.) $\qquad [\mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{A}_{\mu-1}] \leq [\mathfrak{z}, \mathfrak{A}] = E$

d.h. $\mathfrak{A}_{\mu-1}$ liegt im Zentrum von $\mathfrak{A}_\mu$.

Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{A}_\mu$ hyperzentral ist.

Dazu sei $1 \neq \mathfrak{M} \trianglelefteq \mathfrak{A}_\mu$ ein Normalteiler von $\mathfrak{A}_\mu$ mit

$$\mathfrak{A}_\mu/\mathfrak{M} \neq 1.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) $\qquad \mathfrak{A}_{\mu-1} \leq \mathfrak{M}$

Es gilt dann

$$\frac{\mathfrak{A}_\mu/\mathfrak{A}_{\mu-1}}{\mathfrak{M}/\mathfrak{A}_{\mu-1}} \cong \mathfrak{A}_\mu/\mathfrak{M}$$

$\mathfrak{A}_\mu/\mathfrak{M}$ ist als homomorphes Bild der nach (5.2.) abelschen Gruppe $\mathfrak{A}_\mu/\mathfrak{A}_{\mu-1}$ abelsch.

(b) $\qquad \mathfrak{A}_{\mu-1} \not\leq \mathfrak{M}$

Dann ist aber

$$\mathfrak{A}_{\mu-1}\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}_{\mu-1}/\mathfrak{A}_{\mu-1}\cap\mathfrak{N} \neq 1$$

und (5.8.) ergibt

$$1 \neq \mathfrak{A}_{\mu-1}\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \leq \mathfrak{z}\left(\mathfrak{A}_{\mu}/\mathfrak{N}\right)$$

Insgesamt ist also nachgewiesen, daß jedes homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{A}}_{\mu} \neq 1$ ein von 1 verschiedenes Zentrum besitzt, d.h. $\mathfrak{A}_{\mu}$ ist hyperzentral.

Wegen der Maximalität von $\mathfrak{N}$ ergibt sich

(5.9.) $$\mathfrak{A}_{\mu} \leq \mathfrak{N}$$

was im Widerspruch zu (5.6.) steht.

Genauso läßt sich zeigen:

5.7.* Lemma: Wenn in einer auflösbaren Gruppe $\mathfrak{A}$ ein maximaler hyperzentraler Normalteiler $\mathfrak{N}$ existiert, dann ist der Zentralisator $\mathfrak{z}(\mathfrak{N} \leq \mathfrak{A})$ in $\mathfrak{N}$ enthalten.

Wie bei endlichen Gruppen ergibt sich nun sofort:

5.8. Satz (PLOTKIN [3]): Die Faktorgruppe einer auflösbaren Gruppe nach ihrem PLOTKIN-Radikal $\mathfrak{N}$ ist isomorph einer Untergruppe $\overline{S}$ der äußeren Automorphismengruppe $\overline{A}(\mathfrak{N})$:

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \cong \overline{S}$$

Beweis: Die Abbildung

$$\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow A(\mathfrak{N})$$
$$A \longrightarrow \tau(\mathfrak{N}, A) =: \tau(A)$$

erklärt einen Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ in $A(\mathfrak{N})$. $\tau(A)$ ist ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{N}$ genau dann, wenn ein $N \in \mathfrak{N}$ existiert mit

$$\tau(A) = \tau(N). \tag{5.10.}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$AN^{-1} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{N} \leq \mathfrak{G}).$$

Lemma 5.7. zeigt $A \in \mathfrak{N}$.

Aus dem allgemeinen Homomorphiesatz folgt nun

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \cong \overline{S}$$

wo $\overline{S}$ eine Untergruppe der äußeren Automorphismengruppe $\overline{A}(\mathfrak{N})$ ist.

Analog erhält man, wenn man Lemma 5.7.* heranzieht:

5.8.* Satz: Wenn in einer auflösbaren Gruppe $\mathfrak{A}$ ein maximaler hyperzentraler Normalteiler $\mathfrak{N}$ existiert, ist die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ isomorph einer Untergruppe $\overline{S}$ der äußeren Automorphismengruppe $\overline{A}(\mathfrak{N})$.

Um in Analogie zur Theorie der endlichen Gruppen die Struktur lokalhyperzentraler Gruppen auf p-Gruppen zurückführen zu können, ist es natürlich, die betrachteten Gruppen als ordnungsfinit vorauszusetzen. Außerdem dürfen wir stets annehmen, daß sie in auflösbare Gruppen eingebettet, also selbst auflösbar sind.

5.9. Bemerkung

Nach R. BAER [2], Lemma 3.1 ist jede ordnungsfinite metazyklische, also erst recht jede ordnungsfinite auflösbare

Gruppe lokalendlich. Jede lokalendliche p-Gruppe ist lokalhyperzentral. Nach Satz 5.6.* ist in einer lokalendlichen Gruppe das direkte Produkt

$$\mathfrak{N}' = \times \mathfrak{N}_p \qquad (p \in \mathfrak{P}) \quad *)$$

wo $\mathfrak{N}_p$ für alle $p \in \mathfrak{P}$ der Sylownormalteiler ist, lokalhyperzentral und im PLOTKIN-Radikal enthalten.

R. BAER [2](Corollary 3.3.) hat auch gezeigt, daß jede ordnungsfinite metazyklische Gruppe, in der Elemente relativ primer Ordnungen vertauschbar sind, direktes Produkt ihrer p-Sylownormalteiler ist.

Auf unseren Fall angewendet bedeutet dies, daß in einer lokalendlichen Gruppe das PLOTKIN-Radikal direktes Produkt lokalhyperzentraler p-Gruppen ist:

$$(5.11.) \qquad \mathfrak{N}' = \mathfrak{N} = \times \mathfrak{N}_p \qquad (p \in \mathfrak{P}).$$

Im Hinblick auf Satz 5.8.* und das 7. Kapitel interessieren Endlichkeitsbedingungen, welche in einer lokalendlichen auflösbaren Gruppe die Existenz eines einzigen maximalen hyperzentralen Normalteilers garantieren bzw. sichern, daß das PLOTKIN-Radikal hyperzentral ist.

5.10. Bemerkung: Man kann leicht zeigen: In einer lokalendlichen Gruppe existiert ein einziger maximaler hyperzentraler Normalteiler genau dann, wenn für jede Primzahl p ein einziger maximaler hyperzentraler p-Normalteiler existiert.

5.11. Bemerkung: Für p-Gruppen hat man das Kriterium von DIETZMANN (SPECHT [1] Sätze 3.2.8. und 3.2.8.*).

*) $\mathfrak{P}$ bezeichnet die Menge aller Primzahlen

Kriterium. Für eine p-Gruppe $\mathfrak{P}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathfrak{P}$ besitzt ein von 1 verschiedenes Zentrum.
2. $\mathfrak{P}$ besitzt eine von 1 verschiedene endliche Ähnlichkeitsklasse.
3. $\mathfrak{P}$ besitzt einen von 1 verschiedenen endlichen Normalteiler.

R. BAER ([2] Example 3.4) hat ein Beispiel für eine auflösbare lokalhyperzentrale p-Gruppe angegeben, in der kein maximaler hyperzentraler Normalteiler existiert. Wir geben ein Beispiel für eine auflösbare p-Gruppe an, in der ein einziger maximaler hyperzentraler Normalteiler existiert, der nicht mit dem PLOTKIN-Radikal zusammenfällt.

5.12. Beispiel *)

Für eine feste Primzahl p werde eine abelsche Gruppe $\mathfrak{L}$ durch

$$\mathfrak{L} = \{\bigcup_n B_n\}\,,\ [B_m, B_n] = B_m^p = E \quad \text{für alle } 0 \leq m < n < \infty$$

definiert.

Weiter sei $\mathfrak{A}$ eine zu $\mathfrak{L}$ isomorphe Gruppe. Da $\mathfrak{A}$ abzählbar viele Elemente besitzt, können wir die Basiselemente von $\mathfrak{L}$ eineindeutig auf die Elemente von $\mathfrak{A}$ abbilden. Das dem Element A zugeordnete Basiselement $B \in \mathfrak{L}$ werde mit B(A) bezeichnet. Jedes $X \in \mathfrak{A}$ induziert durch die Vorschrift

$$A \longrightarrow XA \qquad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}$$

eine Permutation von $\mathfrak{A}$. Somit gibt es genau einen Automorphismus X* von $\mathfrak{L}$, der B(A) auf B(XA) abbildet. Die Zu-

*) Auf die folgende Kranzproduktkonstruktion wurde ich von Prof. R. Baer, Frankfurt, hingewiesem.

ordnung

$$X \longrightarrow X^*$$

stellt einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf eine Gruppe $\mathfrak{A}^*$ von Automorphismen von $\mathfrak{H}$ dar.

Es sei $\mathfrak{Q} := \mathfrak{H}\mathfrak{A}^*$ das im Holomorph von $\mathfrak{H}$ gebildete Produkt von $\mathfrak{H}$ mit seiner Automorphismengruppe $\mathfrak{A}^*$.

$\mathfrak{Q}$ hat folgende Eigenschaften:

(5.13.) Jedes Element $Q \in \mathfrak{Q}$ ist eindeutig in der Form

$$Q = BA^* \qquad (B \in \mathfrak{H},\ A^* \in \mathfrak{A}^*)$$

darstellbar.

(5.14.) $E < \mathfrak{H} < \mathfrak{Q}$ ist eine auflösbare Folge für $\mathfrak{Q}$

(5.15.) $\mathfrak{Q}$ ist lokalendlich und p-Gruppe.

(5.16.) Jeder $\mathfrak{H}$ umfassende Normalteiler $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{Q}$ mit $\mathrm{ind}(\mathfrak{N} : \mathfrak{H}) = 0$ enthält keinen endlichen Normalteiler $\hat{\mathfrak{N}} \neq 1$ und ist infolgedessen nach Bemerkung 5.11. nicht hyperzentral.

Beweis von (5.16.): Angenommen es existiere ein endlicher Normalteiler $\hat{\mathfrak{N}} \neq 1$ von $\mathfrak{N}$.

In den Darstellungen

$$N = B_1^{e_1} \dots B_f^{e_f} A^*$$

der Elemente $N \in \hat{\mathfrak{N}}$ treten insgesamt höchstens endlich viele verschiedene Basiselemente von $\mathfrak{H}$ auf: $B_1, \dots, B_n$ (bei geeigneter Numerierung).

$\{ B_1, \dots, B_n \}$ ist nicht-leer, da aus $1 \neq A^* \in \hat{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{A}^*$ auch

$$B_1^{-1} A^* B_1 = B_1^{-1} B_1' A^*$$

folgt, wo $B_1' \neq B_1$.

B_1 komme etwa in der Darstellung

$$N_1 = B_1^{e_1} \dots A^*$$

eines Elementes $N_1 \in \hat{\mathfrak{A}}$ vor.

Wegen $\mathrm{ind}(\mathfrak{A}:\mathfrak{L}) = 0$ existiert ein $N^* \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}^*$ mit

$$N^{*-1} B_1 = B_r N^{*-1}$$

so daß

(*) $\qquad B_r \neq B_\nu \qquad$ für alle $\nu = 1,\dots,n.$

Nun ist aber

$$N^{*-1} N_1 N^* = N^{*-1} B_1^{e_1} \dots A^* N^* = B_r^{e_1} \dots A^*$$

d.h.

$B_r \in \{B_1,\dots,B_n\}$, was einen Widerspruch zu (*) darstellt.

Weiter sei gegeben eine Gruppe $\mathfrak{L} \cong \mathfrak{L}$. Wir bilden analog das Kranzprodukt $\mathfrak{G} := \mathfrak{L} \wr \mathfrak{N}^*$.

$\mathfrak{G}$ hat folgende Eigenschaften:

(5.17.) $E < \mathfrak{L} < \mathfrak{L}\mathfrak{L}^{**} < \mathfrak{L} \wr \mathfrak{N}^* = \mathfrak{G}$ ist eine auflösbare Folge für $\mathfrak{G}$.

(5.18.) $\mathfrak{G}$ ist eine lokalendliche und damit lokalhyperzentrale p-Gruppe.

(5.19.) $\mathfrak{L}$ ist der einzige maximale hyperzentrale Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Beweis von (5.19.): Auf dieselbe Weise wie (5.16.) beweist man: Jeder $\mathfrak{L}$ umfassende Normalteiler $\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ mit $\mathrm{ind}(\mathfrak{N}:\mathfrak{L}) = 0$ besitzt keinen von 1 verschiedenen endlichen Normalteiler und ist somit auch nicht hyperzentral.

Sei nun $\mathfrak{R}$ ein hyperzentraler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann gilt $\mathfrak{z}(\mathfrak{R}) \neq 1$. Es werde angenommen: $\mathfrak{R} \not\subseteq \mathfrak{L}$. Wir unterscheiden

zwei Fälle:

(a) $\mathfrak{z}(\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{L} = 1$.

Dann ist $\mathfrak{L} := \mathfrak{L} \times \mathfrak{z}(\mathfrak{R})$ als direktes Produkt hyperzentraler Gruppen hyperzentral.

(b) $\mathfrak{S} := \mathfrak{z}(\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{L} \neq 1$.

Wegen $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{z}(\mathfrak{R}\mathfrak{L})$ besitzt $\mathfrak{M} := \mathfrak{R}\mathfrak{L}$ ein von 1 verschiedenes Zentrum und nach Bemerkung 5.11. einen von 1 verschiedenen endlichen Normalteiler.

$\mathfrak{M}^*$ besitzt wegen (5.16.) keinen endlichen Normalteiler $\neq 1$, so daß

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{M} : \mathfrak{L}) = 0 \qquad \text{im Falle (b)}$$

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{L} : \mathfrak{L}) = 0 \qquad \text{im Falle (a)}$$

gelten muß.

In beiden Fällen ergibt sich nach dem zu Anfang Bemerkten ein Widerspruch.

Es ist also notwendig $\mathfrak{R} \leq \mathfrak{L}$ q.e.d.

S.N. TSCHERNIKOW (SPECHT [1], S. 378) hat gezeigt, daß jede lokalendliche p-Gruppe mit Minimalbedingung hyperzentral ist. Wir dürfen uns auf auflösbare Gruppen beschränken und können auf sehr einfache Weise den Satz beweisen:

5.13. Satz: Jede auflösbare p-Gruppe $\mathfrak{P}$, welche die Minimalbedingung erfüllt, ist hyperzentral.

Beweis: Da alle geforderten Eigenschaften sich auf homomorphe Bilder übertragen, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{P}$ einen endlichen Normalteiler $\neq 1$ besitzt.

In $\mathfrak{P}$ existiert wegen der Auflösbarkeit ein abelscher Normal-

teiler $\mathfrak{P}^* \neq 1$. Der Sockel $\mathfrak{S}^* \neq 1$ von $\mathfrak{P}^*$ ist direktes Produkt zyklischer Gruppen $\mathfrak{Z}_\iota$ von Primzahlordnung p

$$\mathfrak{S}^* = \times \mathfrak{Z}_\iota \qquad (\iota \text{ über } \mathfrak{I}).$$

Wegen der Minimalbedingung ist dieses Produkt endlich, also $\mathfrak{S}^*$ selbst endlich. Als Sockel des Normalteilers $\mathfrak{P}^*$ ist $\mathfrak{S}^*$ Normalteiler von $\mathfrak{P}$. Aus dem Kriterium von DIETZMANN (Bemerkung 5.11.) folgt nun unmittelbar die Behauptung.

5.14. Bemerkung

Wir haben die Minimalbedingung zwar nur für die abelschen Untergruppen benötigt, doch bedeutet dies keine Verschärfung, da die auflösbaren Gruppen zur Klasse derjenigen Gruppen gehören, für welche die Minimalbedingung für alle Untergruppen gleichwertig ist mit der Minimalbedingung für die abelschen Untergruppen (PLOTKIN [2]).

Die Endlichkeitsbedingungen des TSCHERNIKOWschen Satzes lassen sich abschwächen:

5.15. Satz: Eine lokalhyperzentrale Gruppe $\mathfrak{A}$, in welcher der Normalteilerverband $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ die schwache Minimalbedingung erfüllt, ist hyperzentral.

Beweis: Wir ziehen ein Lemma von A. MALZEV heran (Beweis z.B. bei M$^{\text{C}}$LAIN [1]): Jeder minimale Normalteiler $\neq 1$ einer lokalhyperzentralen Gruppe ist im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ enthalten. Die Behauptung ergibt sich sofort, wenn wir noch bemerken, daß sich die schwache Minimalbedingung für den Normalteilerverband auf homomorphe Bilder vererbt.

6. Gruppenerweiterungen

Nachdem in den vorangehenden Kapiteln untersucht wurde, in welche Bestandteile sich gewisse Klassen von Gruppen zerlegen lassen, soll nun umgekehrt, wieder analog zur Theorie der endlichen Gruppen, der Frage nachgegangen werden, ob und in welcher Weise aus vorgeschriebenen solchen Bestandteilen Gruppen mit entsprechenden Eigenschaften konstruiert werden können.

Es handelt sich darum, folgende Erweiterungsprobleme zu lösen:

Problem 6.1.: Eine auflösbare lokalhyperzentrale ordnungsfinite Gruppe $\mathfrak{A}$ soll mit einer auflösbaren ordnungsfiniten Untergruppe $\bar{S}$ ihrer äußeren Automorphismengruppe $\bar{A}(\mathfrak{A})$ so erweitert werden, daß die Erweiterung $\mathfrak{A}$ auflösbar ist und $\mathfrak{A}$ (bis auf Isomorphie) gerade als PLOTKIN-Radikal besitzt.

Problem 6.2.: Eine auflösbare Gruppe $\mathfrak{A}$ soll mit einer halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{H}$ so erweitert werden, daß die entstehende Gruppe $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{A}$ (bis auf Isomorphie) gerade als maximalen $J(\mathfrak{G})$-metabelschen Normalteiler besitzt.

Wir werden auf beide Probleme die SCHREIERsche Erweiterungstheorie anwenden und stellen zuvor ihre grundlegenden Tatsachen zusammen.

Für die Existenz einer normalen Erweiterung $\mathfrak{G}$ einer Gruppe

durch eine Gruppe $\mathfrak{F}$ sind folgende drei Bedingungen notwendig und hinreichend:

(6.1.) Die Existenz einer Funktion $\varsigma : \mathfrak{F} \longrightarrow A(\mathfrak{A})$, die jedem $a \in \mathfrak{F}$ einen Automorphismus $\varsigma(a) \in A(\mathfrak{A})$ zuordnet.

(6.2.) Die Existenz einer Funktion $f: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{A}$, die jedem geordneten Paar $(a,b) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ ein Element $f(a,b) \in \mathfrak{A}$ zuordnet.

(6.3.) ς und f genügen den Beziehungen

1. $f(ab,c)\, f(a,b)^{\varsigma(c)} = f(a,bc)\, f(b,c)$ für alle $a,b,c \in \mathfrak{F}$.
2. $\varsigma(a)\, \varsigma(b) = \varsigma(ab)\, \tau(f(a,b))$ für alle $a,b \in \mathfrak{F}$ *)

Die Erweiterung $\mathfrak{G}$ wird dann dargestellt durch

$$\mathfrak{G} = \{(a|N) : a \in \mathfrak{F},\ N \in \mathfrak{A}\}$$

mit der Verknüpfung

(6.4.) $$(a|N)(b|M) = (ab \mid f(a,b) N^{\varsigma(b)} M)$$

für alle $(a|N)$, $(b|M) \in \mathfrak{G}$.

Wenn man o.B.d.A. für das Einselement $e \in \mathfrak{F}$ fordert

(6.5.) $\varsigma(e) = \varepsilon =$ identischer Automorphismus von $\mathfrak{A}$,

dann ist $(e|E)$ das Einselement von $\mathfrak{G}$.

Das Inverse eines Elements $(a|N) \in \mathfrak{G}$ ist durch

(6.6.) $$(a|N)^{-1} = (a^{-1} \mid N^{-\varsigma(a)^{-1}} f^{-1}(a,a^{-1}))$$

gegeben.

*) $\tau(f(a,b))$ ist der von dem Element $f(a,b)$ in $\mathfrak{A}$ induzierte Automorphismus.

Außerdem hat man noch — wie sich aus (6.3.)1. sofort ergibt —

(6.7.) $f(a,e) = f(e,e) = f(e,a)$
für alle $a \in \mathfrak{F}$.

Die Abbildung

(6.8.) $\varphi_1 : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{H}$
$N \longrightarrow (e|N)$

ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{N}$ auf eine Untergruppe $\tilde{\mathfrak{N}}$ von $\mathfrak{H}$.

Die Abbildung

(6.9.) $\varphi_2 : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{F}$
$(a|N) \longrightarrow a$

induziert einen Isomorphismus von $\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{H}/\tilde{\mathfrak{N}}$ auf $\mathfrak{F}$.

Das Paar $(\mathfrak{s},f)$ heißt ein zu $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}$ passendes Faktorsystem und das mit Hilfe von $(\mathfrak{s},f)$ gebildete Produkt $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}$ das verschränkte Produkt von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{H} = (\tilde{\mathfrak{N}}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathfrak{s}, f).$$

6.3. Bemerkung: Bei gegebener Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{F}$ erhält man ein zu $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}$ passendes Faktorsystem durch folgende Konstruktion:
Jedem $a \in \mathfrak{F}$ entspricht eine Restklasse der Gruppe $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{N}$, aus der ein Repräsentant ausgewählt und mit R(a) bezeichnet werde.
Jedes R(a) definiert in $\mathfrak{N}$ einen Automorphismus $\tau(\mathfrak{N},R(a))$.
Wir setzen

$$\mathfrak{s}(a) := \tau(\mathfrak{N},R(a)).$$

Wir haben weiter

$$R(a)R(b) \equiv R(ab) \pmod{\mathfrak{A}} \quad \text{für alle } a,b \in \mathfrak{F}. \tag{6.10.}$$

Die Funktion $f: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{A}$

$$(a,b) \longrightarrow f(a,b)$$

wird durch

$$R(a)R(b) = R(ab)f(a,b) \tag{6.11.}$$

erklärt.

Beide Seiten von (6.11.) als Erzeugende eines inneren Automorphismus von $\mathfrak{A}$ angewendet liefern die Bedingung (6.3.)1.

Ebenso erhält man aus der Identität

$$(R(a)R(b))R(c) = R(a)(R(b)R(c))$$

die Bedingung (6.3.)2.

Um auch (6.5.) zu erfüllen, hat man für $R(e)$ nur das Einselement $E \in \mathfrak{A}$ zu wählen.

7. Auflösbare Gruppen als spezielle verschränkte Produkte

Richten wir nach den allgemeinen Vorbemerkungen des 6. Kapitels über Gruppenerweiterungen unser Augenmerk nun auf die Nebenbedingungen von Problem 6.1.: Die Erweiterung $\mathfrak{A}$ soll auflösbar sein und $\mathfrak{N}$ (bis auf Isomorphie) genau als PLOTKIN-Radikal haben.

Es ist unser Ziel, dafür notwendige und hinreichende Bedingungen anzugeben (Sätze 7.3. und 7.4.). Zur Vorbereitung beweisen wir ein Lemma, in welchem das PLOTKIN-Radikal einer ordnungsfiniten, auflösbaren Gruppe in Beziehung gesetzt wird zu dem PLOTKIN-Radikal der Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$.

7.1. Lemma: $\mathfrak{A}$ sei eine ordnungsfinite auflösbare Gruppe, $\mathfrak{N}$ das PLOTKIN-Radikal von $\mathfrak{A}$ mit der Zerlegung

$$\mathfrak{N} = \times \mathfrak{N}_p \qquad (p \in \mathbb{P}),$$

$\overline{\mathfrak{N}}^*$ das PLOTKIN-Radikal von $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ mit der Zerlegung

$$\overline{\mathfrak{N}}^* = \times \overline{\mathfrak{N}}_p^* \qquad (p \in \mathbb{P}).$$

Mit $\mathfrak{N}^*$ bzw. $\mathfrak{N}_p^*$ (für alle $p \in \mathbb{P}$) werden die Urbilder von $\overline{\mathfrak{N}}^*$ bzw. $\overline{\mathfrak{N}}_p^*$ bei dem Homomorphismus $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ bezeichnet.

Zur Abkürzung werde noch für jede Primzahl p

$$\mathfrak{M}_p := \times \mathfrak{N}_q \qquad (q \in \mathbb{P} \,,\, q \neq p)$$

gesetzt.

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

Für jede Primzahl p induziert die Abbildung

$$\varphi_p : \mathfrak{A}_p^* \longrightarrow A(\mathfrak{M}_p)$$
$$N \longrightarrow \tau(\mathfrak{M}_p, N)$$

einen Isomorphismus von $\overline{\mathfrak{A}}_p^*$ in die äußere Automorphismengruppe $\overline{A}(\mathfrak{M}_p)$.

Beweis: φ_p ist offenbar ein Homomorphismus. Wir setzen

$$(7.1.) \quad \mathfrak{K}_p := \left\{ N \in \mathfrak{A}_p^* \,\middle|\, \tau(\mathfrak{M}_p, N) \in J(\mathfrak{M}_p) \right.$$

und haben sofort

$$\mathfrak{A}_p^* / \mathfrak{K}_p \cong \overline{S}_p$$

wo $\overline{S}_p$ eine Untergruppe von $\overline{A}(\mathfrak{M}_p)$ ist. Es bleibt zu zeigen $\mathfrak{K}_p = \mathfrak{A}$.

Jedes $N \in \mathfrak{A}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$N = M_p N_p, \qquad (M_p \in \mathfrak{M}_p,\ N \in \mathfrak{A}_p).$$

Wegen

$$[\mathfrak{M}_p, \mathfrak{A}_p] = 1$$

induziert N_p in $\mathfrak{M}_p$ die Identität und damit gilt

$$\tau(\mathfrak{M}_p, M_p) = \tau(\mathfrak{M}_p, N),$$

was

$$(7.2.) \qquad \mathfrak{A} \leq \mathfrak{K}_p$$

zeigt.

Zur Umkehrung von (7.2.) gehen wir davon aus, daß $\mathfrak{A}_p^*/\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_p \cong \mathfrak{A}_p$ p-Gruppen sind, also auch $\mathfrak{A}_p^*/\mathfrak{M}_p$ und damit auch $\mathfrak{E}_p/\mathfrak{M}_p$.

$\mathfrak{E}_p/\mathfrak{M}_p$ und $\mathfrak{M}_p$ haben relativ prime Ordnung, $\mathfrak{W}_p$ ist also das Erzeugnis derjenigen Elemente von $\mathfrak{E}_p$, welche zu p relativ prime Ordnung haben. $\mathfrak{E}_p$ entsteht aus $\mathfrak{W}_p$ durch Adjunktion der p-Elemente.

Wegen der Lokalendlichkeit von $\mathfrak{A}$ ist nach dem Kriterium von HILTON $\mathfrak{E}_p$ genau dann lokalhyperzentral, wenn in $\mathfrak{E}_p$ zwei Elemente relativ primer Ordnung vertauschbar sind.

Wir zeigen dazu speziell zunächst

$$\left[P, \mathfrak{W}_p\right] = 1 \text{ , wenn ord } P = p^f \text{ , } P \in \mathfrak{E}_p.$$

Aus (7.1.) ergibt sich die Existenz eines $M^* \in \mathfrak{W}_p$, so daß

$$(7.3.) \qquad P^{-1}MP = M^{*-1}MM^* \qquad \text{für alle } M \in \mathfrak{W}_p .$$

Es folgt

$$(7.4.) \qquad M^*P^{-1}MPM^{*-1} = M \qquad \text{für alle } M \in \mathfrak{W}_p$$

und speziell

$$(7.5.) \qquad \left[M^*, P\right] = E.$$

Mit M^*P^{-1} induzieren auch $(M^*P^{-1})^{p^f} = M^{*p^f}$ und $M^{*m} = E$ (ord $M^* = m$) in $\mathfrak{W}_p$ die Identität.

Wegen $(m,p) = 1$ existieren ganze Zahlen a,b mit

$$1 = am + bp^f .$$

Aus der Darstellung

$$M^* = (M^{*m})^a \, (M^{*p^f})^b$$

ist ersichtlich, daß auch M^* in $\mathfrak{W}_p$ die Identität induziert. Dann wegen (7.3.) aber auch P.

Wir haben damit gezeigt:

(7.6.) $\quad [P, \mathfrak{W}_p] = 1$ für alle p-Elemente $P \in \mathfrak{S}_p$.

Es seien nun X und Y zwei beliebige Elemente relativ primer Ordnungen aus $\mathfrak{S}_p$.

Wenn etwa ord X p nicht als Teiler enthält, gilt

(7.7.) $\quad X \in \mathfrak{W}_p$.

Y läßt sich in der Form

$$Y = RM$$

schreiben, wo $M \in \mathfrak{W}_p$ und ord $R = p^r$. Es ist auch (ord M, ord X) = 1.

$\mathfrak{W}_p$ ist lokalhyperzentral. Mit (7.6.) gilt

$$[X,Y] = [X,RM] = [X,M] \cdot [X,R]^M = E.$$

Aus der Definitionsgleichung (7.1.) von $\mathfrak{S}_p$ ergibt sich, daß $\mathfrak{S}_p$ mit $\mathfrak{N}_p^*$ und $\mathfrak{N}_p$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{A}$ ist. Es folgt

$$\mathfrak{S}_p \leq \mathfrak{N}$$

und wegen (7.2.)

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{S}_p.$$

Der in Lemma 7.1. bewiesene Zusammenhang zwischen den PLOTKIN-Radikalen $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{N}}^*$ von $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ überträgt sich auf Grund von Satz 5.8. auf $\mathfrak{N}$ und das PLOTKIN-Radikal der zu

$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ isomorphen Automorphismengruppe $\bar{S}$.

Um dies kurz formulieren zu können, werde erklärt:

7.2. Definition: Es sei $\mathfrak{A}$ eine auflösbare, lokalhyperzentrale und ordnungsfinite Gruppe mit der Zerlegung

$$\mathfrak{A} = \times \mathfrak{A}_p \qquad (\text{über } p \in \mathbb{P})$$

$$(\mathfrak{A}_p = \times \mathfrak{A}_q \qquad (\text{über } q \in \mathbb{P},\ q \neq p)).$$

$\bar{S}$ sei eine ordnungsfinite auflösbare Untergruppe von $\bar{A}(\mathfrak{A})$, $\bar{N}$ das PLOTKIN-Radikal von $\bar{S}$ mit der Zerlegung

$$\bar{N} = \times \bar{N}_p \qquad (\text{über } p \in \mathbb{P}).$$

S, N bzw. N_p seien die Urbilder von $\bar{S}$, $\bar{N}$ bzw. $\bar{N}_p$ bei dem Homomorphismus $A(\mathfrak{A}) \longrightarrow \bar{A}(\mathfrak{A})$.

Unter diesen Bezeichnungen heiße $\bar{S}$ mit $\mathfrak{A}$ verkettet, wenn für jede Primzahl p ein Element $\alpha \in N_p$ in $\mathfrak{A}_p$ genau dann einen inneren Automorphismus induziert, wenn $\alpha \in J(\mathfrak{A})$.

Wir halten fest:

7.3. Satz: Die in Satz 5.8. erklärte zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ isomorphe Untergruppe $\bar{S}$ von $\bar{A}(\mathfrak{A})$ ist mit $\mathfrak{A}$ verkettet und auflösbar. $\mathfrak{A}$ besitzt eine auflösbare Folge, deren Glieder S-zulässig sind.

Beweis: Die Verkettung folgt aus Lemma 7.1.. $\bar{S}$ ist als homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$ $J(\mathfrak{A})$-metabelsch (und auflösbar).

Von Satz 7.3. gilt die Umkehrung.

7.4. Satz: $\mathfrak{A}$ sei eine ordnungsfinite lokalhyperzentrale und auflösbare Gruppe, $\overline{S}$ eine auflösbare ordnungsfinite Untergruppe von $\overline{A}(\mathfrak{A})$. $\mathfrak{A}$ besitze eine auflösbare Folge $(\mathfrak{A}_\nu)$, deren Glieder S-zulässig sind.

Dann gilt:

Jede nach der Schreierschen Erweiterungstheorie vermittels eines zu $\mathfrak{A}$ und $\overline{S}$ passenden Faktorsystems (ϱ,f) konstruierte Gruppe

$$\mathfrak{A} = (\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\overline{S}}, \varrho, f)$$

ist auflösbar und hat $\mathfrak{A}$ genau dann zum PLOTKIN-Radikal, wenn $\mathfrak{A}$ mit $\overline{S}$ verkettet ist.

7.5. Bemerkung: Der Automorphismenklasse $\overline{\alpha} \in \overline{S}$ entspricht in $\mathfrak{A}$ die Menge der Automorphismen, die von den Elementen $(\bar{\alpha}|N)$ $(N \in \mathfrak{A})$ in $\tilde{\mathfrak{A}}$ induziert werden.

Damit folgt aus (6.4.) und (6.6.) für alle $M \in \mathfrak{A}$

$$(\bar{\alpha}|E)^{-1}(\bar{\varepsilon}|M)(\bar{\alpha}|E) = (\bar{\alpha}^{-1}|f^{-1}(\bar{\alpha},\bar{\alpha}^{-1}))(\bar{\varepsilon}|M)(\bar{\alpha}|E) =$$

$$(7.8.)\quad (\bar{\alpha}^{-1}|f^{-1}(\bar{\alpha},\bar{\alpha}^{-1})M)(\bar{\alpha}|E) =$$

$$(\bar{\varepsilon}|f(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha})(f^{-1}(\bar{\alpha},\bar{\alpha}^{-1}))^{\varrho(\bar{\alpha})}M^{\varrho(\bar{\alpha})}) = (\bar{\varepsilon}|M^{\varrho(\bar{\alpha})}),$$

Letzteres, da nach (6.3.)1. $f(\bar{\alpha},\bar{\alpha}^{-1})^{\varrho(\bar{\alpha})} = f(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha})$ ist.

Weiter ergibt sich nach einer analogen Rechnung

$$(7.9.)\quad (\bar{\alpha}|N)^{-1}(\bar{\varepsilon}|M)(\bar{\alpha}|N) = (\bar{\varepsilon}|N^{-1}M^{\varrho(\bar{\alpha})}N).$$

Daraus ist ersichtlich, daß $\varrho(\bar{\alpha})$ Repräsentant der Automorphismenklasse $\overline{\alpha}$ ist. Wir nennen in diesem Falle ϱ eine Repräsentantenfunktion, die wegen (6.5.) normiert ist.

Beweis des Satzes: Wegen der Isomorphie (6.8.) ist $(\tilde{\mathfrak{A}}_\nu)$ eine

auflösbare Folge für $\tilde{\mathfrak{A}}$. Um $\tilde{\mathfrak{A}}_\nu \triangleleft \mathfrak{A}$ (für alle ν) zu zeigen, genügt es, wegen der Darstellung

$$(\bar{\alpha}|N) = (\bar{\alpha}|E)(\bar{\varepsilon}|N)$$

die Invarianz jedes $\tilde{\mathfrak{A}}_\nu$ bei inneren Automorphismen von $\mathfrak{A}$ zu zeigen, die von Elementen der Form $(\bar{\alpha}|E)$ induziert werden. Wir entnehmen (7.8.) für $M \in \mathfrak{A}_\nu$

$$(\bar{\alpha}|E)^{-1}(\bar{\varepsilon}|M)(\bar{\alpha}|E) = (\bar{\varepsilon}|M^{g(\bar{\alpha})}) \in \tilde{\mathfrak{A}}_\nu,$$

da $\mathfrak{A}_\nu$ S-zulässig ist.

$\tilde{\mathfrak{A}}_\nu \triangleleft \mathfrak{A}$ (für alle ν) besagt aber, daß $\mathfrak{A}$ $J(\mathfrak{A})$-metabelsch ist.

$\bar{S}$ ist auflösbar und führt wegen $\bar{S} \cong \mathfrak{A}/\tilde{\mathfrak{A}}$ zu einer auflösbaren Folge von $\mathfrak{A}/\tilde{\mathfrak{A}}$, welche trivialerweise eine $J(\mathfrak{A})$-metabelsche Folge ist. Eine normale Erweiterung einer $J(\mathfrak{A})$-metabelschen Gruppe durch eine $J(\mathfrak{A})$-metabelsche Gruppe ist aber $J(\mathfrak{A})$-metabelsch.

Sei nun $\tilde{\mathfrak{R}}$ das PLOTKIN-Radikal von $\mathfrak{A}$.

Wir haben wegen (6.8.)

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \times \tilde{\mathfrak{A}}_p \qquad (p \in \Pi)$$

mit $\mathfrak{A}_p \cong \tilde{\mathfrak{A}}_p$ und $\mathfrak{R}_p \cong \tilde{\mathfrak{R}}_p$.

Wenn $\bar{\mathfrak{R}}^*$ das PLOTKIN-Radikal von $\mathfrak{A}/\tilde{\mathfrak{R}}$ mit der Zerlegung

$$\bar{\tilde{\mathfrak{R}}}^* = \times \bar{\tilde{\mathfrak{R}}}^*_p \qquad (p \in \Pi)$$

ist, bestehen die Isomorphien (Bezeichnungen wie in Def.7.2.)

$$\bar{N} \cong \bar{\tilde{\mathfrak{R}}}^* , \quad \bar{N}_p \cong \bar{\tilde{\mathfrak{R}}}^*_p .$$

Lemma 7.1. zeigt nun:

Für $(\bar{\alpha}|N) \in \tilde{\mathfrak{A}}^*_p$ ist $\tau(\tilde{\mathfrak{R}}_p, (\bar{\alpha}|N))$ dann und nur dann ein innerer Automorphismus von $\tilde{\mathfrak{R}}_p$, wenn $(\bar{\alpha}|N) \in \tilde{\mathfrak{A}}$, d.h. $\bar{\alpha} = \bar{\varepsilon}$ ist.

Dem Automorphismus, der von $(\bar{\alpha}|N)$ in $\tilde{\mathfrak{A}}$ induziert wird, entspricht aber in der Isomorphie (6.8.) wegen (7.9.) der Automorphismus $\varrho(\bar{\alpha})\,\tau(\mathfrak{A},N)$.

Aus $(\bar{\alpha}|N)\in\tilde{\mathfrak{A}}^*_p$ folgt $\varrho(\bar{\alpha})\,\tau(\mathfrak{A},N)\in N_p$.

Somit induziert $\varphi := \varrho(\bar{\alpha})\,\tau(\mathfrak{A},N)\in N_p$ in $\mathfrak{M}_p$ genau dann einen inneren Automorphismus von $\mathfrak{M}_p$, wenn $\varrho(\bar{\alpha}) = \varepsilon$, d.h. $\varphi\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$.

$\bar{S}$ ist also mit $\mathfrak{A}$ verkettet.

Nehmen wir umgekehrt an, daß $\bar{S}$ mit $\mathfrak{A}$ verkettet ist, so induziert $\varrho(\bar{\alpha})\,\tau(\mathfrak{A},N)$ nur für $\varrho(\bar{\alpha})\,\tau(\mathfrak{A},N)\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{M}_p$ einen inneren Automorphismus.

Wegen der Isomorphie (6.8.) ist wieder $\tau(\tilde{\mathfrak{M}}_p,(\bar{\alpha}|N))$ genau im Falle $(\bar{\alpha}|N)\in\tilde{\mathfrak{A}}$ ein innerer Automorphismus von $\tilde{\mathfrak{M}}_p$.

Durch diese Eigenschaft wird aber $\mathfrak{A}$ als PLOTKIN-Radikal von $\mathfrak{A}$ charakterisiert, wie aus folgendem Lemma hervorgeht:

7.6. Lemma: Es sei $\mathfrak{L}$ ein lokalhyperzentraler Normalteiler der lokalendlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit der Zerlegung

$$\mathfrak{L} = \times \mathfrak{L}_p \qquad (p\in\mathfrak{P})$$

$$\mathfrak{R}_p := \times \mathfrak{L}_q \qquad (q\in\mathfrak{P},\ q\neq p)$$

Weiter sei $\overline{\mathfrak{A}}^*$ der maximale lokalhyperzentrale Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ mit der Zerlegung

$$\mathfrak{A}^*/\mathfrak{L} = \overline{\mathfrak{A}}^* = \times \overline{\mathfrak{A}}^*_p \qquad (p\in\mathfrak{P}).$$

Falls für alle Primzahlen p der Automorphismus $\tau(\mathfrak{R}_p,N)$, wo $N\in\mathfrak{A}^*_p$, genau dann ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{R}_p$ ist, wenn $N\in\mathfrak{L}$, dann ist $\mathfrak{L}$ das PLOTKIN-Radikal von $\mathfrak{G}$.

Beweis: Für jede Primzahl p ist die Abbildung

$$\varphi_p : \mathfrak{N}_p^* \longrightarrow A(\mathfrak{R}_p)$$
$$N \longrightarrow \tau(\mathfrak{R}_p, N)$$

ein Homomorphismus von $\mathfrak{N}_p^*$ auf eine Untergruppe T_p mit

$J(\mathfrak{R}_p) \leq T_p \leq A(\mathfrak{R}_p)$.

Wenn

$$(7.10.) \quad \mathfrak{E}_p = \left\{ N \in \mathfrak{N}_p^* \;\middle|\; \tau(\mathfrak{R}_p, N) \in J(\mathfrak{R}_p) \right\}$$

gesetzt wird, induziert φ_p einen Isomorphismus

$$\mathfrak{N}_p^* / \mathfrak{E}_p \cong T_p / J(\mathfrak{R}_p)$$

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{E}_p = \mathfrak{L}$ für alle p.

$\mathfrak{N}$ sei das Plotkin-Radikal von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{N} = \bigtimes \mathfrak{N}_p \qquad (p \in \mathbb{P})$$

Offenbar gilt

$$\mathfrak{L}_q \leq \mathfrak{N}_q \qquad \text{für alle } q \in \mathbb{P}$$

und

$$\mathfrak{R}_p = \bigtimes_{q \neq p} \mathfrak{L}_q \leq \bigtimes_{q \neq p} \mathfrak{N}_q$$

also

$$\left[\mathfrak{R}_p, \mathfrak{N}_p \right] = E.$$

Die Elemente von $\mathfrak{N}_p$ induzieren also in $\mathfrak{R}_p$ die Identität, woraus nach (7.10.)

$$\mathfrak{N}_p \leq \mathfrak{E}_p = \mathfrak{L} \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{P}$$

folgt und damit auch

$$\mathfrak{N} = \bigtimes_p \mathfrak{N}_p \leq \mathfrak{L}$$

7.7. Bemerkung: Nach Satz 7.4. läßt sich die Frage, ob $\mathfrak{R}$ PLOTKIN-Radikal von $\mathfrak{A}$ ist, allein mit Kenntnis von $\mathfrak{N}$ und S entscheiden, hängt also insbesondere nicht von der Wahl von $\mathfrak{A}$ ab.

7.8. Bemerkung: Da eine hyperzentrale Gruppe $\mathfrak{N}$ in der obersten Zentralfolge eine auflösbare Folge mit charakteristischen Gliedern besitzt, ist jede normale Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch eine auflösbare Gruppe auflösbar.

Ohne wesentliche Modifikationen läßt sich wie bei endlichen auch bei ordnungsfiniten Gruppen die Frage angehen, wann zwei gemäß Satz 7.4. konstruierte verschränkte Produkte isomorph sind.

Es ergibt sich

7.9. Satz: Zwei verschränkte Produkte

$$\mathfrak{H}_i = (\tilde{\mathfrak{N}}_i, \bar{S}_i, g_i, f_i) \qquad (i = 1,2)$$

worin $\mathfrak{N}_i$ mit $\bar{S}_i$ verkettet ist $(i = 1,2)$, sind nur dann isomorph, wenn $\mathfrak{N}_1 \cong \mathfrak{N}_2$ ist.

Falls $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$ vorausgesetzt wird, ist für die Isomorphie $\mathfrak{H}_1 \cong \mathfrak{H}_2$ notwendig, daß $\bar{S}_1$ und $\bar{S}_2$ in $\bar{A}(\mathfrak{N})$ konjugiert sind.

Falls auch noch $\bar{S}_1 = \bar{S}_2$ gesetzt wird, sind $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ genau dann isomorph, wenn die Faktorsysteme (g_1, f_1) und (g_2, f_2) im Sinne der SCHREIERschen Erweiterungstheorie äquivalent sind.

8. Erweiterungen auflösbarer durch halbeinfache Gruppen

In fast trivialer Weise erhält man folgenden Satz:

8.1. Satz: Es seien $\mathfrak{A}$ eine auflösbare, $\mathfrak{H}$ eine halbeinfache Gruppe.
Genau dann existiert eine normale Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{H}$, welche $\mathfrak{A}$ (bis auf Isomorphie) als maximalen $J(\mathfrak{G})$-metabelschen Normalteiler besitzt, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(8.1.) Es existiert ein zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ passendes Faktorsystem (ϱ, f).

(8.2.) $\mathfrak{A}$ besitzt eine auflösbare Folge $(\mathfrak{A}_\nu)$, deren Glieder $\mathfrak{A}_\nu$ für jeden Automorphismus $\varrho(H)$ $(H \in \mathfrak{H})$ zulässig sind.

Beweis: Wenn $\mathfrak{G}$ die verlangten Eigenschaften hat, existiert nach der SCHREIERschen Theorie ein Faktorsystem, das (8.1.) und (8.2.) erfüllt.
Die Umkehrung ergibt sich wie im Beweis zu Satz 7.5.

8.2. Bemerkung

Die Bedingung (8.2.) ist z.B. bei auflösbaren Gruppen erfüllt, die eine auflösbare Reihe besitzen. In diesem Fall existiert immer auch eine auflösbare Reihe mit charakteristischen Gliedern, nämlich die absteigende Kommutatorreihe.

Literaturverzeichnis

R. BAER [1], Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung
Math. Ann. 129 (1955)

R. BAER [2], Nilpotent groups and their generalisations
AMS-Transactions 47 (1940), 393-434

H. FITTING [1], Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, Jahresber. DMV 48 (1938), 77-141

P.A. GOLBERG [1], Unendliche halbeinfache Gruppen
Mat. Sbornik, N.S. 17 (1945), 131-142
(Russ.)

K.A. HIRSCH [1], On infinite soluble groups (III)
Proc. London Math. Soc. Ser.2 vol.49 (1941)

D.H. M^{c}LAIN [1], On locally nilpotent groups
Proc. Cambridge Phil.Soc. 52 (1956)

B.I. PLOTKIN [1], Über einige Kriterien lokalnilpotenter Gruppen, Uspehi Mat. Nauk 9 (1954)
(AMS-Translations 2;17)

B.I. PLOTKIN [2], Über Gruppen mit Endlichkeitsbedingungen für abelsche Untergruppen, Dokl. Akad. Nauk SSSR 107 (1956) (Russ.)

B.I. PLOTKIN [3], Radikale und halbeinfache Gruppen
Trudy Moskov. mat. obsc. 6 (1957)
(AMS-Translations 2;17)

W. SPECHT [1], Gruppentheorie
Grundlehren der math. Wissenschaften
Springer 1956

W. SPECHT [2], Zur Theorie der halbeinfachen und vollreduziblen Gruppen, Manuskript

J. WIEGOLD [1], On direct factors in groups
London Journal vol.35 I (1960)

Lebenslauf

Am 28. Juli 1939 wurde ich als fünftes Kind des Landwirts und Sattlermeisters Michael Wittmann und seiner Ehefrau Eva, geb. Herrlen, in Schwabach geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule Rohr (Mittelfranken) trat ich 1952 in das Deutsche Gymnasium Schwabach ein und legte dort 1959 die Reifeprüfung ab.

Da mir das Stipendium für besonders Begabte gewährt wurde, konnte ich im Wintersemester 1959/60 an der Universität Erlangen das Studium der Mathematik und Physik aufnehmen. Ich hörte in erster Linie Vorlesungen der Herren Professoren R. Fleischmann, E. Mollwo, G. Nöbeling, W. Specht, L. Waldmann und H.-J. Kowalsky.

Im Herbst 1964 legte ich in Erlangen die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien in Mathematik und Physik ab. Anschließend besuchte ich als Studienreferendar dieser Fächergruppe das Pädagogische Seminar am Dientzenhofer - Gymnasium Bamberg und beschloß 1966 die Ausbildung mit der Pädagogischen Prüfung für das Höhere Lehramt.

Im Mai 1966 heiratete ich die Studienassessorin Brigitte Stumpf; im März 1967 wurde unser erstes Kind, Christoph, geboren.

Seit September 1966 bin ich am Mathematischen Institut der Universität Erlangen als wissenschaftlicher Assistent tätig.

Offsetdruck - Fotodruck
Josef Hogl
8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz,) Tel. 22990

Offsetdruck - Fotodruck
- J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Telefon 22990 -